ŢEPEŞ ONEA FLORIN

STATICA CONSTRUCŢIILOR partea II

“Ovidius University Press”
Constanţa 2004

Referenţi ştiinţifici:

Prof.dr.ing. Valeriu Bănuţ
Conf.dr.ing. Mircea Eugen Teodorescu

Mulţumesc pe această cale Prof.dr.ing. Valeriu Bănuţ pentru sprijinul acordat la realizarea acestei cărţi.

"Ovidius Univesity Press" Constanţa ,2004

ISBN 973-614-214-0

CUPRINS partea II-a

	Pag.
CAP.1 Grinzi continue.	5
1.1 Elemente generale	5
1.2 Ecuaţia celor 3 momente.	6
1.3 Încărcarea cu variaţii de temperatură	10
1.4 Încărcarea cu cedări de reazeme	11
1.5 Linii de influenţă la grinzi continue	12
1.5.1 Linii de influenţă pentru necunoscute	12
1.5.2 Linii de influenţă pentru eforturi şi reacţiuni	13
1.6 Grinzi cu o singură deschidere static nedeterminate	23
CAP.2 Arce static nedeterminate.Grinzi cu zăbrele static nedeterminate	25
2.1 Arce static nedeterminate	25
2.1.1 Introducere	25
2.1.2 Arcul dublu articulat	25
2.1.3 Arcul cu tirant	28
2.1.4 Arcul dublu încastrat	29
2.2 Grinzi cu zăbrele	40
CAP.3 Metoda deplasărilor.	47
3.1 Introducere	47
3.2 Tipuri de structuri în metoda deplasărilor. Structură auxiliară	48
3.3 Sistem de bază. Ecuaţii de condiţie.	49
3.4 Convenţie de semne.	51
3.5 Legătura între eforturi şi încărcări pentru barele tip din S.B.	52
3.6 Valorile momentelor încovoietoare pentru barele tip	54
3.7 Structuri cu noduri fixe.	55
3.8 Structuri cu noduri deplasabile.	63
3.9 Structuri simetrice.	79
3.9.1 Procedeul semistructurilor.	79
3.9.2 Procedeul grupării necunoscutelor.	80
3.10 Comparaţie între metoda eforturilor şi metoda deplasărilor	83
CAP.4 Calculul structurilor la acţiunea variaţiei de temperatură şi a cedărilor de reazeme.	85
4.1 Acţiunea variaţiei de temperatură	85
4.1.1 Structuri static determinate	85
4.1.2 Aplicarea metodei eforturilor pentru structuri încărcate cu variaţie de temperatură	88
4.1.3 Aplicarea metodei deplasărilor în calculul structurilor acţionate de variaţie de temperatură	91
4.2 Acţiunea cedărilor de reazeme	95
4.2.1 Structuri static determinate	95

4.2.2 Metoda eforturilor 96
4.2.3 Metoda deplasărilor 97

CAP.5. Procedeul distribuirii şi transmiterii momentelor (Procedeul Cross). 107

CAP.6 Procedeul de operare în două etape. 121

CAP.7 Calcul neliniar elastic şi neliniar elasto-plastic 135
7.1 Introducere 135
7.2 Calcul de ordinul I neliniar elastic 137
7.3 Calculul de ordinul II neliniar elastic 138
7.4 Calcul neliniar elasto plastic 138
7.5 Premisele calculului în domeniul elasto-plastic 138
7.6 Calculul de ordinul I elasto-plastic. Metoda plastică simplă 139

CAP.8 Calculul de ordinul II 151
8.1 Specificul calculului de ordinul II 151
8.2 Bara încastrată-articulată încărcată cu rotire de nod 155
8.3 Bara încastrată-articulată încărcată cu rotire de bară 156

CAP.9 Calculul de stabilitate al structurilor 167
9.1 Interpretarea energetică a stabilităţii structurilor 167
9.2 Flambajul barei drepte solicitată la compresiune centrică în stadiul elastic 170
9.3 Stabilitatea sistemelor cu număr finit de grade de libertate 172
9.4 Stabilitatea cadrelor prin metoda deplasărilor 179
9.5 Stabilitatea structurilor simetrice 180
Program de calcul automat al funcţiilor de corecţie 190
Anexa 1 191

CAP. 1 GRINZI CONTINUE

1.1 Elemente generale

Grinda continuă este o grindă dreaptă pe mai multe reazeme, din care unul fix (articulaţie sau încastrare) şi restul mobile (reazeme simple). Grinzile continue se întîlnesc curent ca structuri de rezistenţă în construcţii, de exemplu la poduri, la planşee.

Reazemele simple permit alungirea sau scurtarea liberă a grinzii continue.

Sub acţiunea încărcărilor grinda se deformează respectînd continuitatea pe reazemele intermediare, astfel că cele două ramuri ale deformatei au în dreptul reazemului tangentă comună; aceasta reprezintă condiţia de continuitate pe reazemul respectiv.

Gradul de nedeterminare statică se stabileşte astfel:

-pentru grinzile continue cu n reazeme, dintre care unul este o articulaţie plană, atunci gradul de nedeterminare statică este egal cu n-2, respectiv numărul reazemelor intermediare.

-pentru grinzile continue care au un capăt încastrat, gradul de nedeterminare statică este egal cu numărul reazemelor simple (fig.1.1b

Grinzile continue din fig.1.1 au următoarele grade de nedeterminare statică:

-a) grinda din fig.1.1a N=3 . (Se poate aplica relaţia N=3C-A-2S ; C=4, A=1,S=4; N=3x4-1-2x4=3 unde C=număr contururi perfect închise, A=număr de articulaţii, S=număr reazeme simple)

-b) grinda din fig.1.1b N=4. C=4,A=0,S=4, N=3x4-0-2x4=4

-c) grinda din fig. 1.1c N=5, C=4,A=0,S=3,N=3x4-0-2x3-1=5

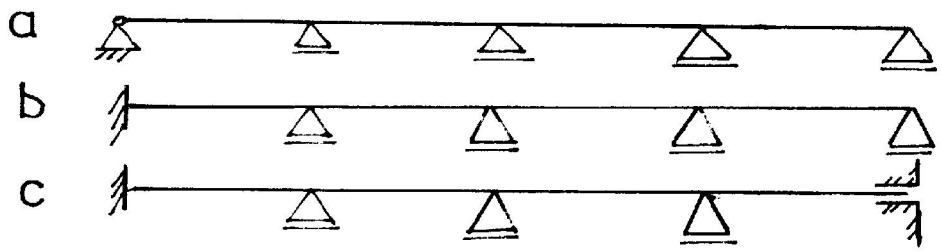


Fig.1.1 Tipuri de grinzi continue

Dupa cum se ştie rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda eforturilor implică alegerea unui sistem de bază, existînd o infinitate de posibilităţi de alegere a acestui sistem.

Rezolvarea grinzilor continue se poate simplifica prin alegerea unui sistem de bază particular.

Se consideră grinda continuă din fig.1.2a, de patru ori static nedeterminată. În cazul alegerii sistemului de bază din fig.1.2b rezolvarea structurii este dificilă deoarece pentru orice încărcare în cîmp, diagrama de moment încovoietor se extinde pe întreaga lungime a grinzii. O soluţie mult mai bună este de alegere a sistemului de bază din fig.1.2c, obţinut prin întreruperea continuităţii grinzii în secţiunile din dreptul reazemelor şi introducerea de articulaţii şi a echivalentului mecanic, necunoscuta X_i. Sistemul de bază (SB_2) permite o rezolvare mai facilă, fiind posibilă sistematizarea calculului grinzilor continue.

Acest sistem de bază, care conţine articulaţii în dreptul reazemelor intermediare are particularitatea că diagramele unitare apar numai pe deschiderile adiacente reazemului în care s-a acţionat cu perchea de momente unitare.

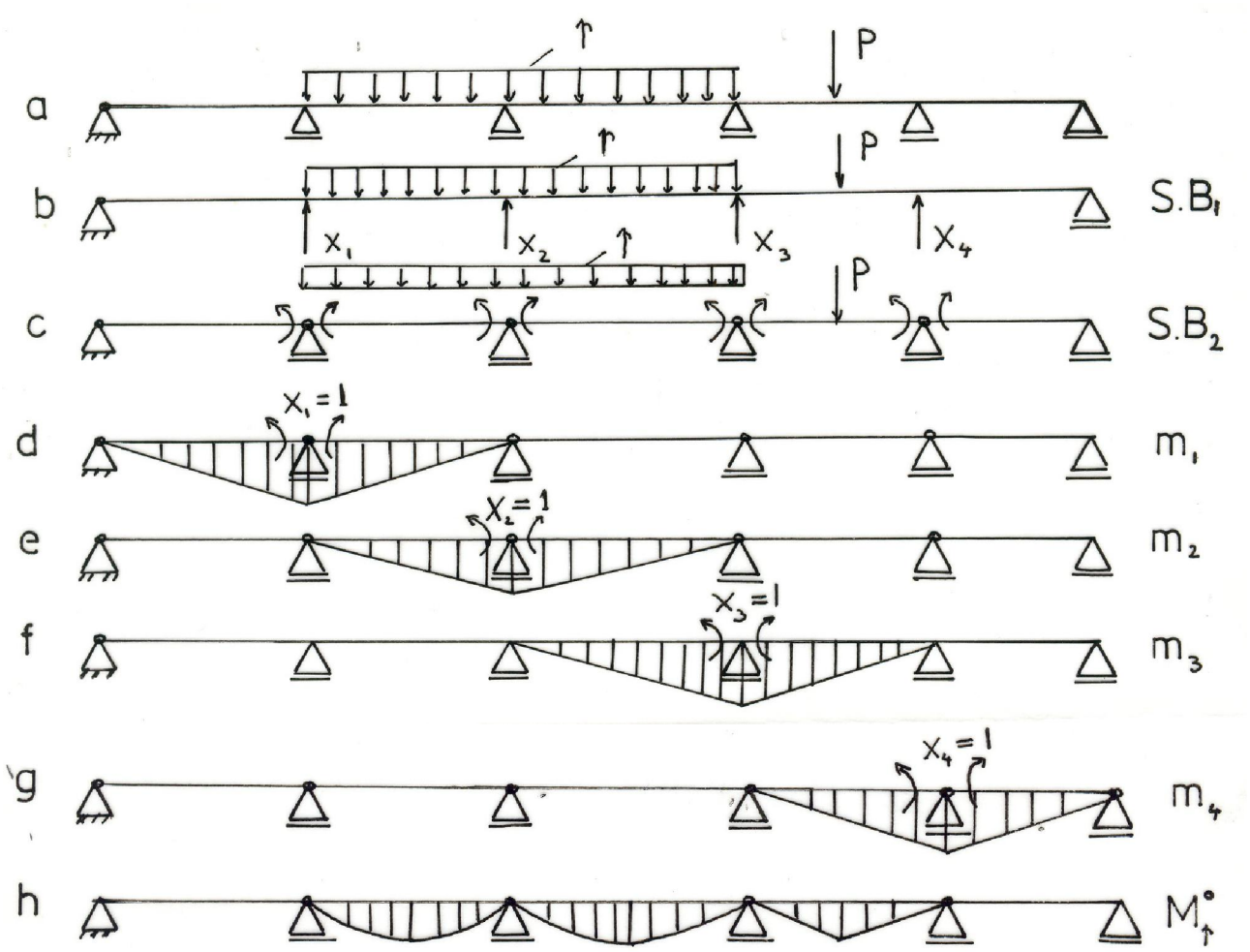


Fig.1.2 Sistem de bază, diagrame unitare şi diagramă M_p^o

1.2 Ecuaţia celor trei momente

Se consideră o grindă continuă de n ori static nedeterminată (figura 1.3). Sistemul de bază optim se obţine prin suprimarea cîte unei legături în continuitatea grinzii pe reazemele intermediare. Sistemul de bază rezultat este format dintr-o succesiune de grinzi simplu rezemate. Necunoscutele sînt momentele încovoietoare pe grinda continuă în secţiunile de pe reazemele suplimentare.

Acest mod de rezolvare a fost elaborat de Clapeyron.

Sistemul de bază este prezentat în (fig.1.3b), diagramele unitare (fig.1.3c,d,e) şi diagrama M_p^0 este reprezentată în figura (1.3f).

Pentru acest sistem de bază, ecuaţia generală a metodei eforturilor, care reprezintă condiţia de continuitate în secţiunea din dreptul reazemelor intermediare, are ca semnificaţie fizică condiţia ca rotirea relativă dintre două deschideri adiacente să fie nulă.

Astfel exprimînd condiţia de continuitate din secţiunea j este $\theta_j^{rel}=0$, aceasta are forma dezvoltată:

$$(1.1)\,\mathrm{K}\;\delta_{j1}X_1+\delta_{j2}X_2+\ldots+\delta_{ji}X_i+\delta_{jj}X_j+\delta_{jk}X_k+\ldots+\delta_{jn}X_n+\Delta_{jp}=0$$

unde δ_{ji} reprezintă deplasarea pe direcţia necunoscutei j cînd sistemul de bază este încărcat cu $X_i=1$, iar Δ_{jp} este deplasarea pe direcţia necunoscutei j cînd sistemul de bază este încărcat cu forţele exterioare.

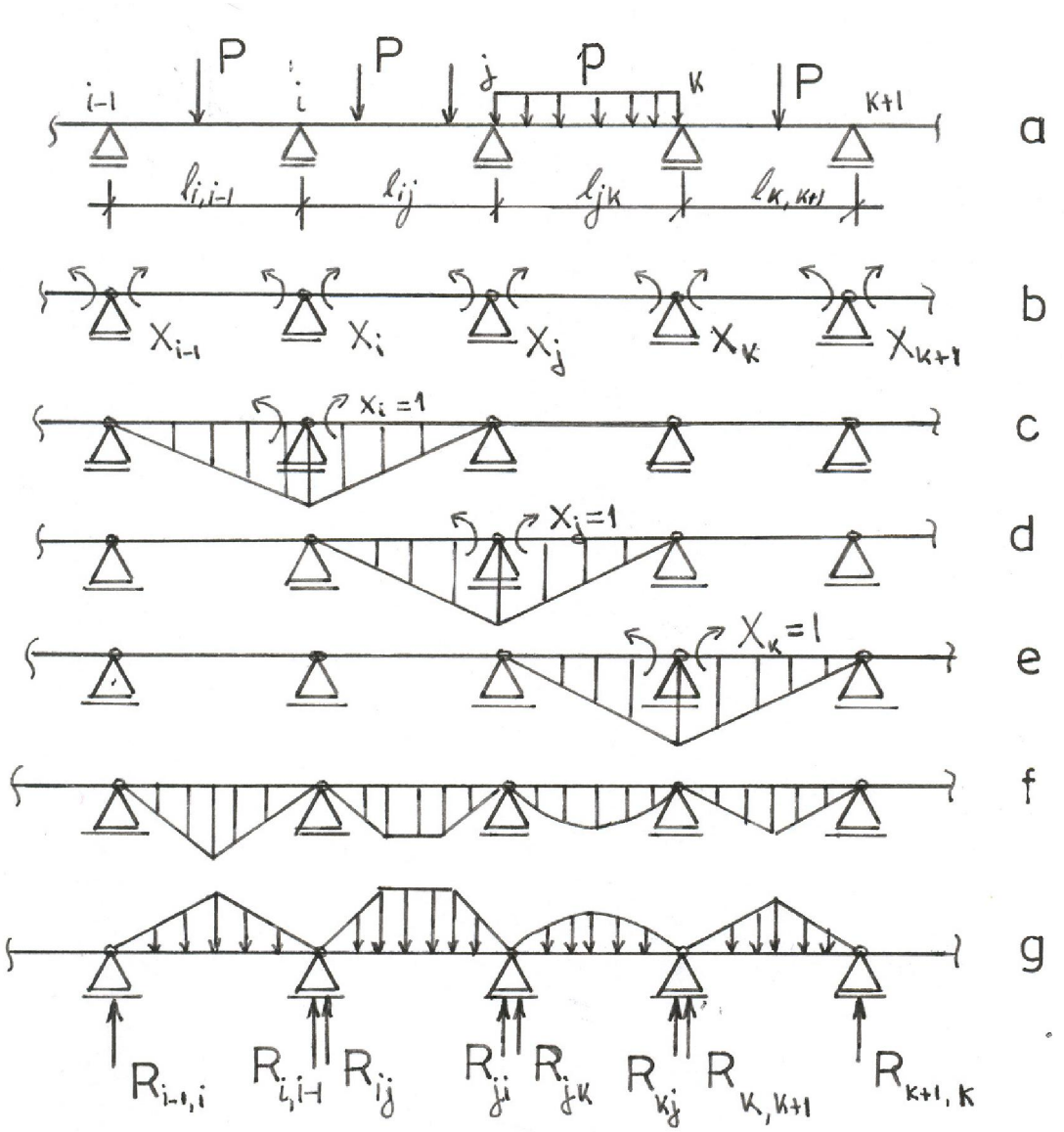


Fig.1.3 Diagrame unitare (c,d,e) ;Reacţiuni pentru sistemul de bază incărcat cu M_p^0 răsturnat

Deoarece diagramele unitare se extind numai pe două deschideri alăturate reazemului în care s-a acţionat cu perechea de momente, coeficienţii δ_{ji}, δ_{jj} şi δ_{jk} sînt diferiţi de zero, ceilalţi fiind egali cu zero. Astfel ecuaţia (1.1) se reduce la forma (1.2), care conţine numai trei necunoscute:

(1.2) K $\delta_{ji} X_i + \delta_{jj} X_j + \delta_{jk} X_k + \Delta_{jp} = 0$

Forma aceasta a ecuaţiei se numeşte ecuaţia celor trei momente deoarece necunoscutele ce intervin în ecuaţie sînt momentele încovoietoare X_i, X_j, X_k , corespunzătoare la trei secţiuni succesive.

Exprimînd coeficienţii necunoscutelor, considerînd că secţiunea transversală a grinzii este constantă pe fiecare deschidere, se obţine:

(1.3) K $\delta_{ij} = \frac{1}{EI_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{ij} \frac{1}{3} 1 = \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}}$

$$\delta_{jj} = \frac{1}{EI_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{ij} \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI_{jk}} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{jk} \cdot \frac{2}{3} 1 = \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} + \frac{l_{jk}}{3EI_{jk}}$$

$$(1.4)\ \mathrm{K}\ \delta_{jk} = \frac{1}{EI_{jk}} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{jk} \cdot \frac{1}{3} 1 = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}}$$

Expresiile obţinute pentru coeficienţii necunoscutelor se introduc în ecuaţia (1.2) şi multiplicînd ecuaţia obţinută cu $6EI_0$,unde I_0 este un moment de inerţie de comparaţie, ales arbitrar, se obţine:

$$(1.5)\ \mathrm{L}\ l_{ij} \frac{I_0}{I_{ij}} X_i + 2\left(l_{ij} \frac{I_0}{I_{ij}} + l_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}} \right) X_j + l_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}} X_k = -6EI_0 \Delta_{jp}$$

Pentru organizarea calculului se face următoarea substituţie conform ecuaţiei (1.6)

$$(1.6)\ \mathrm{K}\ \lambda_{ij} = l_{ij} \frac{I_0}{I_{ij}}\ \mathrm{K}\ \lambda_{jk} = l_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}}$$

unde λ_{ij} şi λ_{jk} reprezintă lungimile transformate ale deschiderilor ij respectiv jk, astfel ecuaţia (1.5) capătă forma:

$$(1.7)\ \mathrm{K}\ \lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6EI_0 \Delta_{jp}$$

Partea din stînga a ecuaţiei de mai sus depinde numai de lungimile transformate ale ginzilor.

Pentru determinarea termenului din dreapta al ecuaţiei (1.7) se consideră diagrama M_p^0 răsturnată, urmînd ca apoi să se calculeze valorile reacţiunilor R_{ji} şi R_{jk}. În fig.1.4 este prezentată diagrama unitară corespunzătoare încărcării sistemului de bază cu necunoscuta X_j=1,cît şi diagrama M_p^0 pe cele două deschideri aferente nodului j. Tot aici este prezentată şi diagrama M_p^o răsturnată, transformată în încărcare pe grindă.

Ţinînd cont de considerentele de mai sus termenul Δ_{jp} capătă forma:

$$(1.8)\ \mathrm{K}\ \Delta_{jp} = \frac{1}{EI_{ij}} \Omega_{ij} m_{gij} + \frac{1}{EI_{jk}} \Omega_{jk} m_{gjk}$$ conform regulii Vereşceaghin.

unde Ω_{ij} reprezintă suprafaţa diagramei M_p^0 pe deschiderea ij, iar m_{gij} ordonata din diagrama unitară m_j pe aceeaşi deschidere. Mărimile Ω_{jk} şi m_{gjk} au aceleaşi semnificaţii.

Ordonatele m_{gij} şi m_{gjk} se pot exprima în modul următor:

$$(1.9)\ \mathrm{K}\ m_{gij} = \frac{x_{gij}}{l_{ij}}\ \mathrm{K}\ m_{gjk} = \frac{x_{gjk}}{l_{jk}}$$

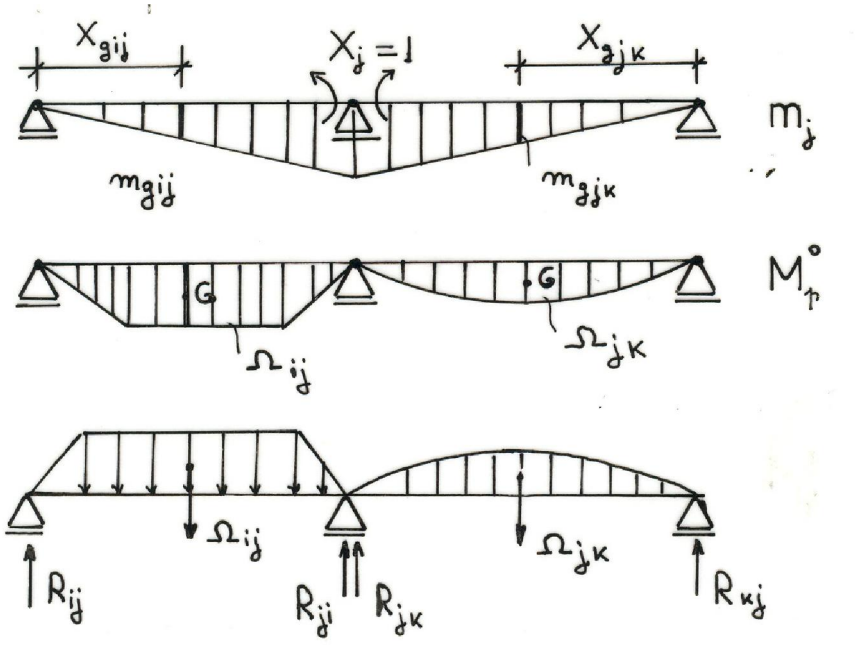


Fig.1.4 Prezentarea diagramelor aferente pentru un nod j curent

Introducînd relaţia (1.9) în ecuaţia (1.8) rezultă:

$$(1.10)\ \mathrm{K}\ \Delta_{jp} = \frac{1}{EI_{ij}}\Omega_{ij}\frac{x_{gij}}{l_{ij}} + \frac{1}{EI_{jk}}\Omega_{jk}\frac{x_{gjk}}{l_{jk}} = \frac{1}{EI_{ij}}R_{ji} + \frac{1}{EI_{jk}}R_{jk}$$

unde R_{ji} reprezintă reacţiunea din reazemul j cînd grinda ij este încărcată cu forţa concentrată Ω_{ij} şi care reprezintă diagrama M_p^0 răsturnată. Reacţiunea R_{jk} reprezintă acelaşi lucru dar pe deschiderea jk.

Astfel se poate exprima ecuaţia celor trei momente sub forma următoare:

$$(1.11)\ \mathrm{K}\ \lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -6R_{ji}\frac{I_0}{I_{ij}} - 6R_{jk}\frac{I_0}{I_{jk}}$$

Ecuaţia de mai sus se exprimă pentru fiecare reazem în care a fost introdusă perechea de momente unitare, rezultînd un număr de ecuaţii egal cu numărul de necunoscute. Se obţine astfel un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute,fiecare ecuaţie avînd cel mult trei necunoscute şi în care necunoscutele sînt momentele de pe reazemele respective.

După rezolvarea sistemului de ecuaţii, soluţiile sistemului reprezintă momentele de pe reazeme, iar în cîmp se poate obţine prin suprapunere de efecte:

$$(1.12)\ \mathrm{K}\ M_p = M_p^{\ 0} + m_1X_1 + m_2X_2 + ... + m_nX_n$$

Pentru trasarea diagramei de forţe tăietoare se poate proceda în modul următor:

-se izolează fiecare tronson de grindă, considerîndu-se ca o grindă dreaptă simplu rezemată (fig.1.5)

-această grindă se încarcă cu forţele exterioare aferente ei şi cu momentele de capăt obţinute din rezolvarea sistemului de ecuaţii.

-se rezolvă grinda static determinată, obţinîndu-se diagrama de forţă tăietoare pe grinda respectivă.

-în final prin concatenarea diagramelor independente pentru fiecare deschidere, se obţine diagrama de forţă tăietoare pentru întreaga grindă continuă.

-de remarcat că reacţiunea totală dintr-un reazem intermediar al grinzii continue se obţine din sumarea reacţiunilor obţinute pentru deschiderile adiacente în care dorim să calculăm reacţiunea respectivă.

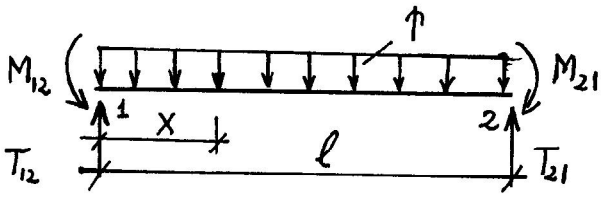


Fig.1.5 Tronson de grindă încărcată cu sarcini exterioare şi momente de capăt

De exemplu, pentru deschiderea din fig.1.5 rezultă:

$$\sum M_2 = 0, \mathrm{L}\ T_{12}l - M_{12} - p\cdot l\cdot\frac{l}{2} + M_{21} = 0, \mathrm{K}\ T_{12} = \frac{M_{12} - M_{21} + p\frac{l^2}{2}}{l}$$

$$\sum M_1 = 0, \mathrm{K} - M_{12} + p\cdot l\cdot\frac{l}{2} - T_{21}\cdot l + M_{21} = 0, \mathrm{K}\ T_{21} = \frac{M_{21} - M_{12} - \frac{l^2}{2}p}{l}$$

$$T_x = T_{12} - px, \mathrm{K}\ T_x = 0, \mathrm{K}\ x = \frac{T_{12}}{p}; M_{\max} = T_{12}\cdot x - M_{12} - p\cdot x\cdot\frac{x}{2}$$

Observaţii:

-prin folosirea ecuaţiei celor trei momente devine inutilă trasarea diagramelor unitare .

-în convenţia pentru necunoscute, reacţiunile fictive R_{ji} şi R_{jk} se introduc în ecuaţie cu semnul plus dacă au sensul de jos în sus şi cu semnul minus dacă au sensul de sus în jos.

-pentru grinda continuă cu încastrare la un capăt, momentul în încastrarea respectivă este o necunoscută. Încastrarea poate fi înlocuită cu două reazeme, iar pe tronsonul dintre cele două reazeme se alege momentul de inerţie egal cu infinit.
-în cazul unei grinzi continue cu consolă la capete, momentul de pe primul şi ultimul reazem va fi de această dată diferit de zero. Pentru o consolă aferentă ultimului reazem, spre exemplu, necunoscuta X_k (corespunzătoare ecuaţiei celor trei momente scrisă în secţiunea precedentă ultimului reazem)va fi diferită de zero şi egală cu momentul încovoietor creat pe ultimul reazem de forţele care acţionează pe consolă. Aceasta ar fi una din modalităţile de introducere în calcul a efectului consolei.

O altă modalitate ar reprezenta-o folosirea diagramei de moment creată de forţele de pe consolă pe deschiderea adiacentă consolei. La calculul reacţiunilor fictive se consideră numai diagrama M_p^0 de pe deschidere, nu şi aceea de pe consolă.

1.3 Încărcarea cu variaţii de temperatură

Schimbarea încărcării la aceeaşi structură conduce numai la modificarea termenilor liberi, nu şi a coeficienţilor necunoscutelor, care nu depind de încărcare. Încărcarea cu variaţia temperaturii în axa grinzii nu produce eforturi la grinda continuă deoarece deplasarea produsă de ea nu este împiedicată, reazemele simple permiţînd alungirea sau scurtarea în lungul grinzii. Deci, la grinda continuă vor apărea eforturi numai din diferenţa de temperatură între faţa inferioară şi superioară $\Delta t = t^{ij}{}_2 - t^{ij}{}_1$.

Ecuaţia de condiţie (j) are forma:

$$(1.13)\ \mathrm{K}\ \lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{i\,jk} X_k + 6EI_o \Delta_{it} = 0$$

Termenul liber din diferenţa de temperatură între feţe se obţine, conform formulei Maxwell Mohr sub forma:

$$(1.14)\ \mathrm{K}\ \Delta_{it} = \sum \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_i dx = \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \Omega_{mi} = \alpha \left[\frac{\Delta t_{ij}}{h_{ij}} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{ij} \right) + \frac{\Delta t_{jk}}{h_{jk}} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{jk} \right) \right]$$

$$(1.15)\ \mathrm{K}\ 6EI_o \Delta_{it} = 3EI_o \alpha \left(\Delta t_{ij} \frac{l_{ij}}{h_{ij}} + \Delta t_{jk} \frac{l_{jk}}{h_{jk}} \right)$$

Deci, ecuaţia de condiţie (j) pentru încărcarea cu variaţii de temperatură va fi:

$$(1.16)\ \mathrm{K}\ \lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{1jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k + 3EI_o \alpha \left(\Delta t_{ij} \frac{l_{ij}}{h_{ij}} + \Delta t_{jk} \frac{l_{jk}}{h_{jk}} \right) = 0$$

în care Δt_{ij} este diferenţa de temperatură între feţe pe traveea ij. Semnul plus la termenul liber fiind valabil pentru $t^{ij}{}_2 > t^{ij}{}_1$.

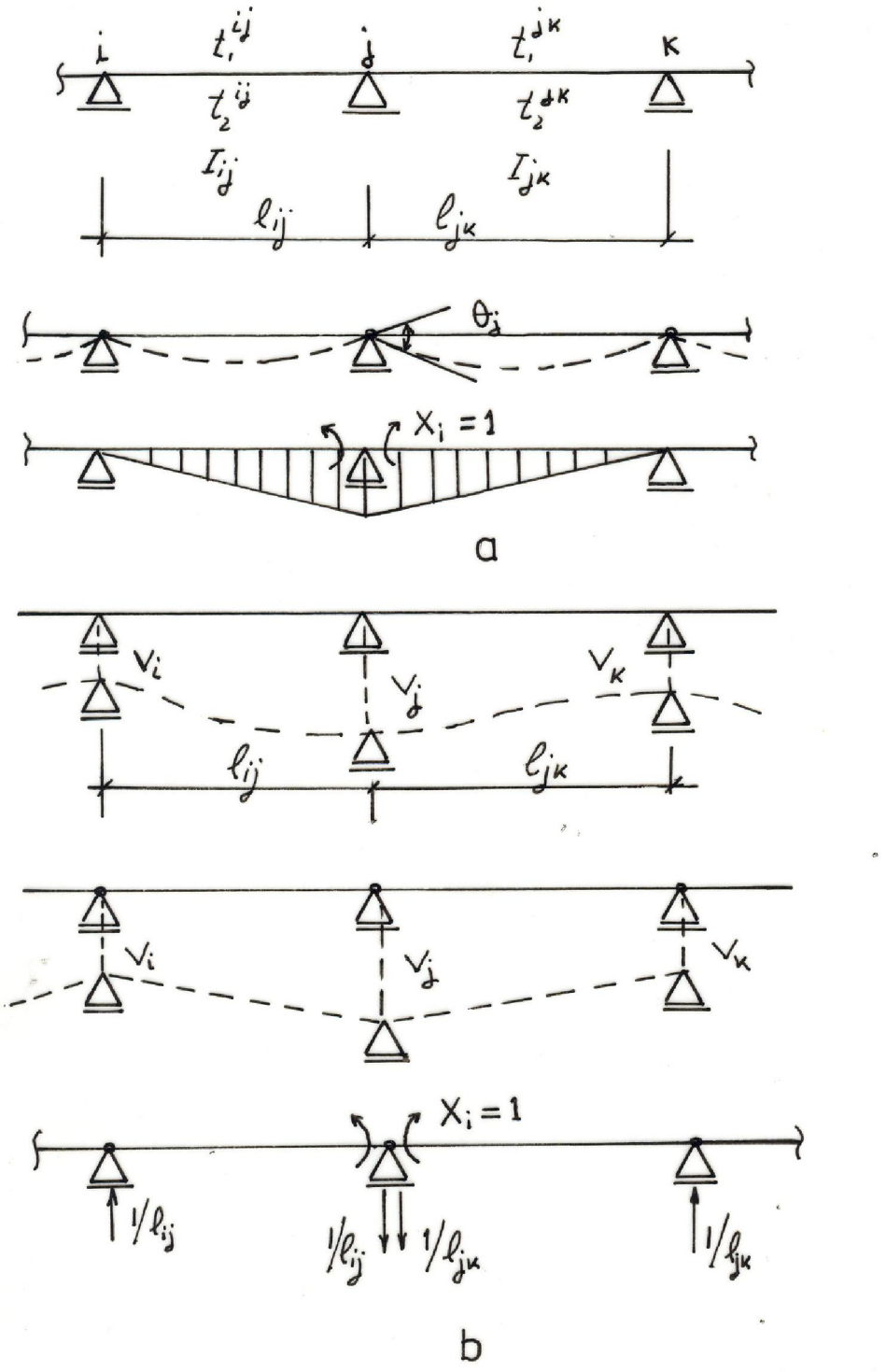


Figura 1.6 Încărcare cu variaţie de temperatură şi cedări de reazeme

1.4 Încărcarea cu cedări de reazeme .

Termenul liber din ecuaţia de condiţie (j) va fi egal conform formulei Maxwell-Mohr, cu lucrul mecanic cu semn schimbat al grupului de forţe format din necunoscuta $X_j=1$ şi reacţiunile corespunzătoare prin cedările de reazem reale.

$$(1.17)\ \mathrm{K}\,\Delta_{ir} = -\sum r_i \Delta_r = -\left[-\frac{1}{l_{ij}} v_i + \left(\frac{1}{l_{ij}} + \frac{1}{l_{jk}} \right) v_j - \frac{1}{l_{jk}} v_k \right] =$$

$$= -\left[\frac{v_j - v_i}{l_{ij}} + \frac{v_j - v_k}{l_{jk}} \right]$$

Deci, ecuaţia de condiţie (i) pentru încărcarea cu cedări de reazeme va avea forma:

$$(1.18)\ \mathrm{K}\,\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6EI_o \left(\frac{v_j - v_i}{l_{ij}} + \frac{v_j - v_k}{l_{jk}} \right)$$

unde v_i este tasarea reazemului i. Cedările de reazeme pot fi cantităţi cînd ecuaţiile rămîn sub forma ecuaţiilor celor trei momente. Sînt însă cazuri în care cedările de reazem sînt proporţionale cu reacţiunile (grinzi continue pe reazeme elastice), care depind de necunoscute. În aceste cazuri, prin aranjarea termenilor respectivi, se ajunge la ecuaţia celor cinci momente.

1.5 Linii de influenţă la grinzi continue

Calculul grinzilor continue la încărcări mobile se face la fel ca la structuri static determinate, pe baza liniilor de influenţă. O ordonată din linia de influenţă reprezintă valoarea mărimii statice respective din secţiunea considerată cînd forţa P=1 se află pe cale în dreptul ordonatei.

1.5.1 Linii de influenţă pentru necunoscute.

La grinzi continue liniile de influenţă ale necunoscutelor momente pe reazeme se pot determina prin metoda generală a eforturilor folosind un sistem de bază static nedeterminat.

Astfel pentru determinarea liniei de influenţă a momentului X_2 pe reazemul 2 se suprimă o legătură rămînînd articulaţia şi se introduce necunoscuta moment. Suprimînd o singură legătură, se scrie o singură ecuaţie de condiţie care să exprime continuitatea grinzii pe reazemul respectiv.

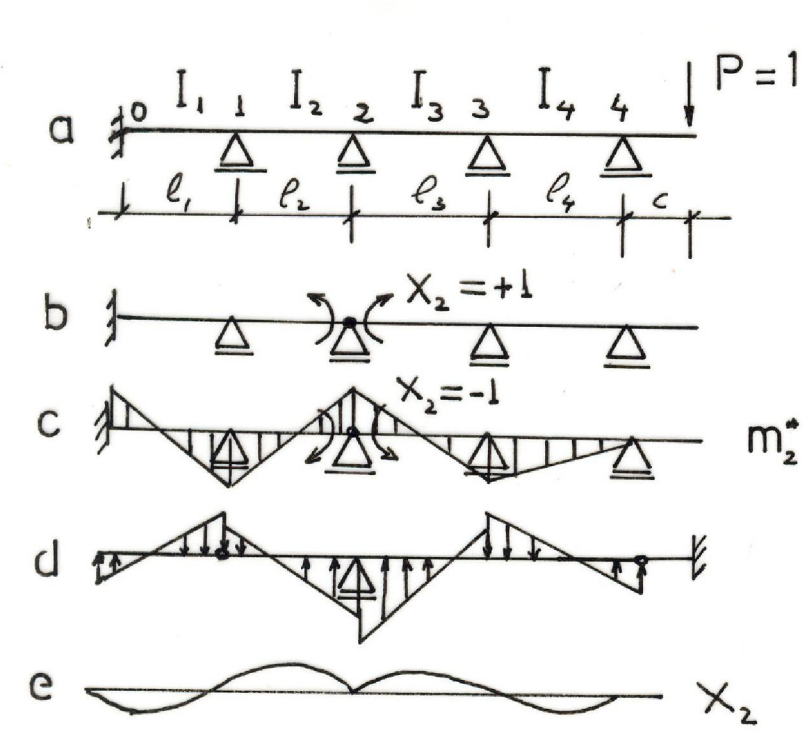


Figura 1.7 Linii de influenţă grinzi continue

(1.20) K $\delta_{22} X_2 + \Delta_{20} = 0$

Termenul liber reprezentînd deplasarea pe direcţia necunoscutei X_2 din încărcarea sistemului de bază static nedeterminat cu forţa unitară mobilă P_i=1, în orice secţiune i a căii, se notează $\Delta_{20} = \delta_{2i}$. Pe baza reciprocităţii deplasărilor unitare ($\delta_{2i} = \delta_{i2}$)se obţine expresia liniei de influenţă a necunoscutei sub forma:

(1.21) K $X_2 = -\frac{\delta_{2i}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{i2}}{\delta_{22}} = \frac{\delta_{i2}^*}{\delta_{22}}$

în care δ_{i2}^* reprezintă deplasarea oricărei secţiuni a căii, deci linia elastică pe direcţia forţei P=1 din încărcarea sistemului de bază cu X_2=-1 (fig.1.7b).

Linia de influenţă a unei necunoscute X_j se obţine deci ca o deformată a căii din încărcarea sistemului de bază de n-1 ori static nedeterminat cu $X_j = -1$, împărţită la o constantă δ_{jj} ce reprezintă rotirea relativă pe reazemul j din X_j=1. Liniile de influenţă la structuri static nedeterminate, obţinîndu-se ca deformate, vor fi curbe, spre deosebire de structurile static determinate la care liniile de influenţă erau liniare.

Problema esenţială este deci determinarea liniilor elastice, care cel mai simplu se obţin prin metoda grinzilor conjugate. Pentru linia elastică δ_{i2}^* se determină în prealabil diagrama m_2^* din X_2=-1 pe sistemul de bază static nedeterminat (fig.1.7b). Se încarcă grinda conjugată cu încărcările elastice $W = \frac{I_o}{I} m_2^*$ (fig.1.7c) şi se determină diagrama de momente fictive (1.7d) care reprezintă linia elastică căutată, $M_f = EI_o \delta_{i2}^*$.

Numitorul din expresia liniei de influenţă δ_{22} poate fi determinat fie cu formula Maxwell-Mohr:

$$EI_o \delta_{22} = \int \frac{I_o}{I} m_2^2 dx$$

fie ca reacţiune fictivă pe sistemul conjugat $R_2^{'}$. Linia de influenţă pentru necunoscuta X_2 se prezintă în fig.1.7e. În mod analog se obţin liniile de influenţă ale celorlalte necunoscute reprezentate în fig.1.7f.

1.5.2 Linii de influenţă pentru eforturi şi reacţiuni.

Liniile de influenţă ale eforturilor într-o secţiune oarecare pe bară şi ale reacţiunilor se obţin simplu, cunoscînd liniile de influenţă ale momentelor la capetele barelor (necunoscute).

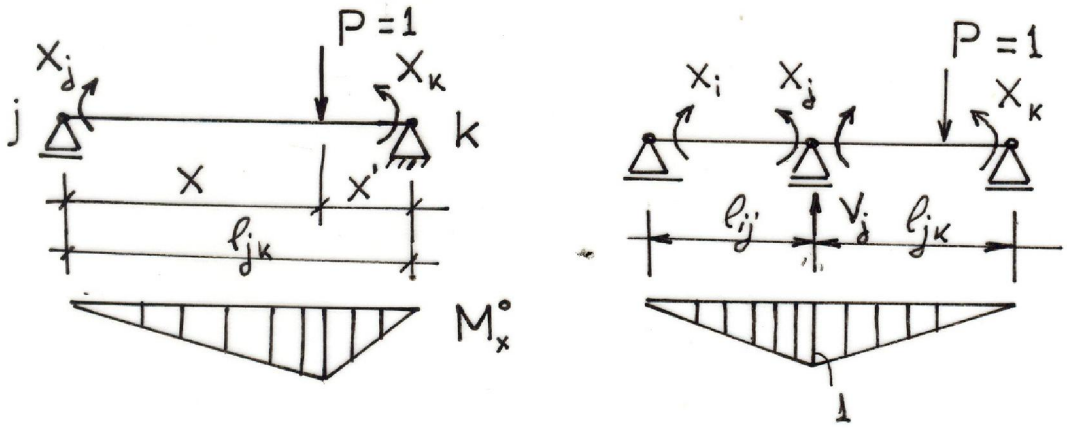


Figura 1.8 Linii de influenţă pentru eforturi şi reacţiuni

Izolînd traveea dublu articulată încărcată cu momentele de capăt şi forţa mobilă P=1, liniile de influenţă ale momentului încovoietor şi ale forţei tăietoare într-o secţiune oarecare x pe travee se obţin astfel:

$M_x = M_x^o + \frac{x'}{l} X_j + \frac{x}{l} X_k$; $T_x = T_x^o + \frac{X_k - X_j}{l}$ în care M_x^0 şi T_x^0 sînt liniile de influenţă pe grinda simplu rezemată şi se suprapun cu liniile de influenţă ale necunoscutelor X_j şi X_k multiplicate cu nişte constante.

Linia de influenţă a reacţiunii pe reazemul j se obţine prin suprapunere:

$$V_j = V_j^o + \frac{X_i - X_j}{l_{i,j}} + \frac{X_k - X_j}{l_{k,j}}$$

Exemplul 1.1:

Să se traseze diagramele de moment încovoietor şi de forţă tăietoare la grinda continuă din fig.1.9

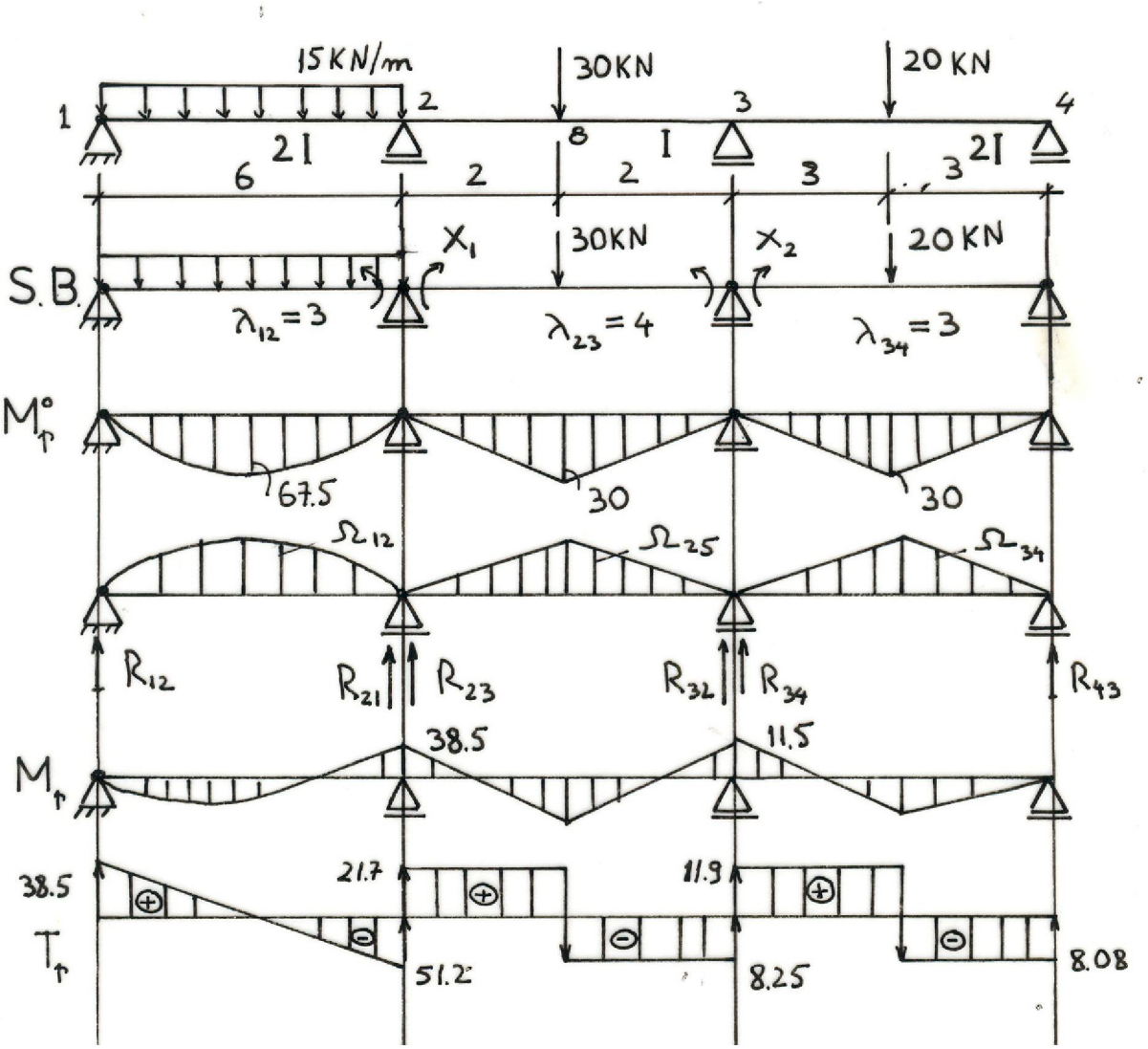


Fig.1.9 Exemplu rezolvare grindă continuă

Calculul lungimilor transformate pentru bare:

$$\lambda_{ij} = l_{ij}\frac{I_o}{I_{ij}}\ ;$$

$$\lambda_{12} = 6\frac{I}{2I} = 3\ ;\ \lambda_{23} = 4\frac{I}{I} = 4; \lambda_{34} = 6\frac{I}{2I} = 3$$

Reacţiunile fictive corespunzătoare încărcării grinzii continue cu diagrama M_p^o răsturnată:

$$\Omega_{12} = \frac{2}{3}\cdot 67{,}5\cdot 6 = 270\ ;\ \Omega_{23} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 4 = 60\ ;\ \Omega_{34} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 6 = 90$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\Omega_{12}}{2} = 135\ ;\ R_{23} = R_{32} = \frac{\Omega_{23}}{2} = 30$$

$$R_{34} = R_{43} = \frac{\Omega_{34}}{2} = 45$$

Ecuaţia celor trei momente are forma:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -6\frac{I_o}{I_{ij}}R_{ji} - 6\frac{I_o}{I_{jk}}R_{jk}$$

Secţiunea 2:

$$2(3+4)X_1 + 4X_2 = -\frac{6I}{2I}135 - 6\frac{I}{I}30$$

Secţiunea 3:

$$4X_1 + 2(4+3)X_2 = -6\frac{I}{I}30 - 6\frac{I}{2I}45$$

Sistemul de ecuaţii devine:

$$14X_1 + 4X_2 = -585 \quad X_1 = -38{,}5$$

$$4X_1 + 14X_2 = -315 \quad X_2 = -11{,}5$$

Pentru calculul forţelor tăietoare se izolează fiecare grindă şi se încarcă cu forţele exterioare şi momentele de capăt.

Grinda 1-2:

$$\sum M_1 = 0$$

$$15\cdot 6\cdot 3 + 38{,}5 - V_2\cdot 6 = 0 \rightarrow V_2 = 51{,}42$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1\cdot 6 - 15\cdot 6\cdot 3 + 38{,}5 = 0 \rightarrow V_1 = 38{,}58$$

Grinda 2-3:

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -38{,}5 + 11{,}5 + 30\cdot 2 - V_3\cdot 4 = 0 \rightarrow V_3 = 8{,}25$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow -38{,}5 + 11{,}5 + V_2\cdot 4 - 30\cdot 2 = 0 \rightarrow V_2 = 21{,}75$$

Grinda 3-4:

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow -11{,}5 + 20\cdot 3 - V_4\cdot 6 = 0 \rightarrow V_4 = 8{,}08$$

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow -11{,}5 - 20\cdot 3 + V_3\cdot 6 = 0 \rightarrow V_3 = 11{,}92$$

Exemplul 1.2: Să se traseze diagramele de moment încovoietor şi de forţă tăietoare la grinda continuă din fig.1.10

Calculul lungimilor transformate:

$$\lambda_{12} = l_{12}\frac{I_0}{I} = 6$$

$$\lambda_{23} = l_{23}\frac{I_0}{2I} = 3$$

Calculul reacţiunilor fictive R_{ij}:

$$R_{12} = \frac{1}{2}60 \cdot 3 = 90$$

$$R_{23} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdot 103{,}5 \cdot 6 = 207$$

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6\frac{I_0}{I_{ij}} \cdot R_{ji} - 6\frac{I_0}{I_{jk}} R_{jk}$$

Secţiunea 1:

$$2(0+6)X_1 + 6X_2 = -6\frac{I}{I} \cdot 0 - 6\frac{I}{I}90$$

Secţiunea 2:

$$6X_1 + 2(6+3)X_2 = -6 \cdot 90 - 6\frac{1}{2} \cdot 207$$

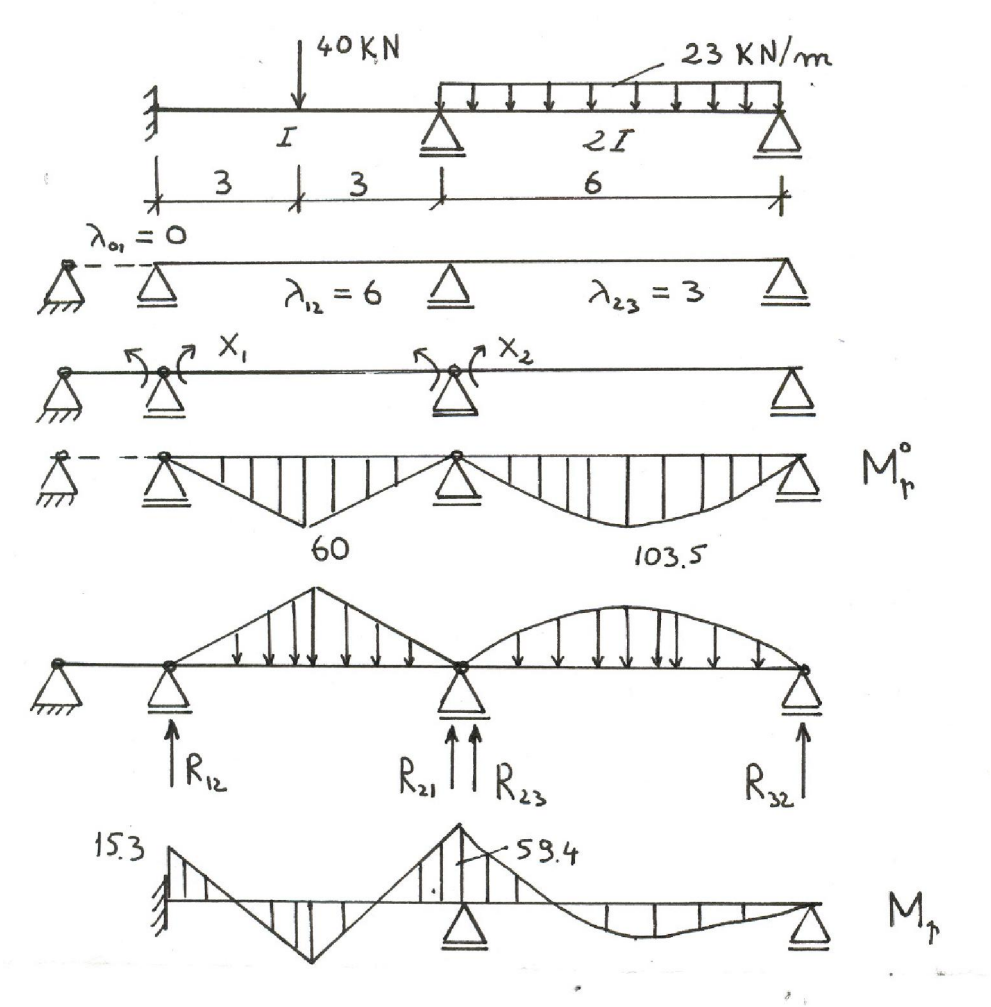


Fig.1.10 Grindă continuă cu încastrare

$$12X_1 + 6X_2 = -540$$

$$6X_1 + 18X_2 = -1161$$

$$X_1 = -15{,}3$$

$$X_2 = -59{,}4$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 + 59{,}4 - 40 \cdot 3 - 15{,}3 = 0 \quad V_1 = 12{,}65$$

$\sum M_1 = 0 \rightarrow -V_2 \cdot 6 + 59{,}4 - 15{,}3 + 40 \cdot 3 = 0$

$V_2 = 27{,}35$

$\sum M_2 = 0 \rightarrow -V_3 \cdot 6 + 138 \cdot 3 - 59{,}4 = 0$

$V_3 = 59{,}1KN$

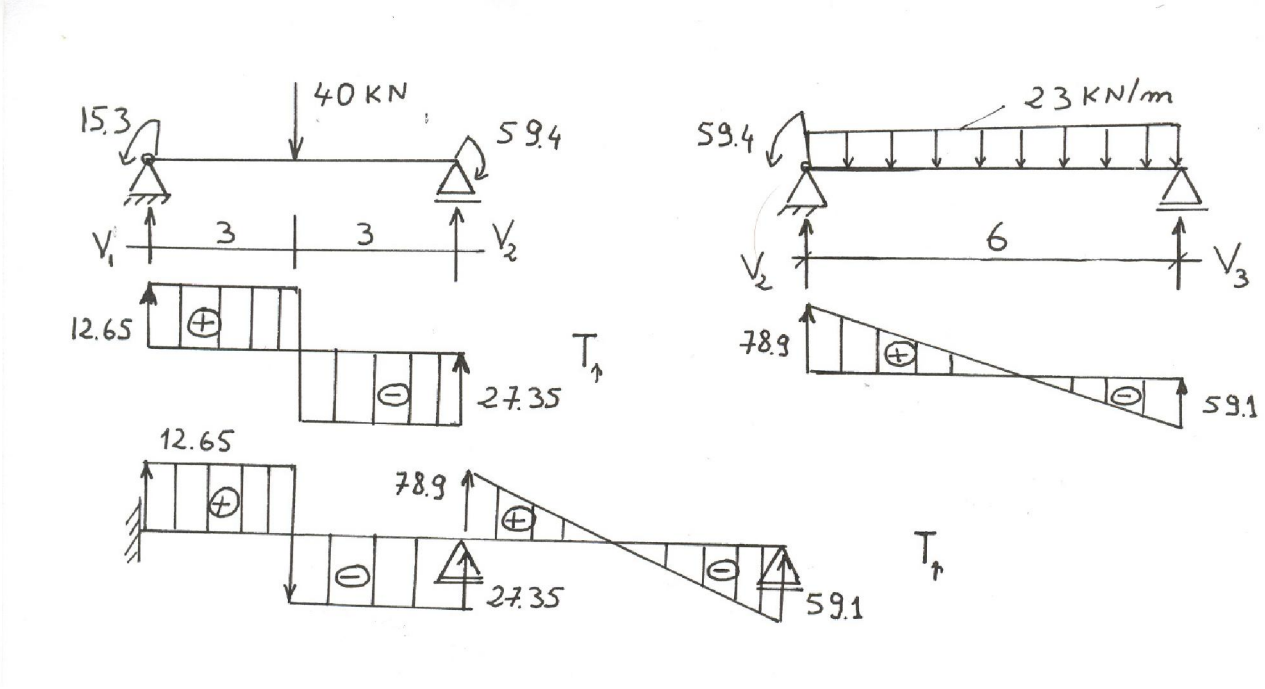


Fig.1.11 Trasarea diagramei de forţă tăietoare pentru grinda continuă figura 1.10

Exemplul 1.3: Să se traseze diagramele de moment încovoietor şi de forţă tăietoare pentru grinda continuă din fig.1.12

Calculul lungimilor transformate:

$\lambda_{01} = 6\frac{I}{3I} = 2;\ \lambda_{12} = 4\frac{I}{2I} = 2;\ \lambda_{23} = 3\frac{I}{2I} = 1{,}5;$

$\Omega_{01} = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 6 = 135\ \ ;\ \Omega_{12} = \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 = 106{,}67$

$R_{01} = R_{10} = \frac{\Omega_{01}}{2} = 67{,}5\ ;\ R_{12} = R_{21} = \frac{\Omega_{12}}{2} = 53{,}33$

$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6\frac{I_o}{I_{ij}} R_{ji} - 6\frac{I_o}{I_{jk}} R_{jk}$

Nod 1:

$2(2+2)X_1 + 2X_2 = -6\frac{I}{3I} \cdot 67{,}5 - 6\frac{I}{2I} \cdot 53{,}34$

Nod 2:

$2X_1 + 2(2+1{,}5)X_2 - 1{,}5 \cdot 40 \cdot 2 = -6\frac{I}{2I} \cdot 53{,}34$

$8X_1 + 2X_2 = -295{,}02$

$2X_1 + 7X_2 = -40{,}02$

$X_1 = -38{,}17; X_2 = 5{,}19$

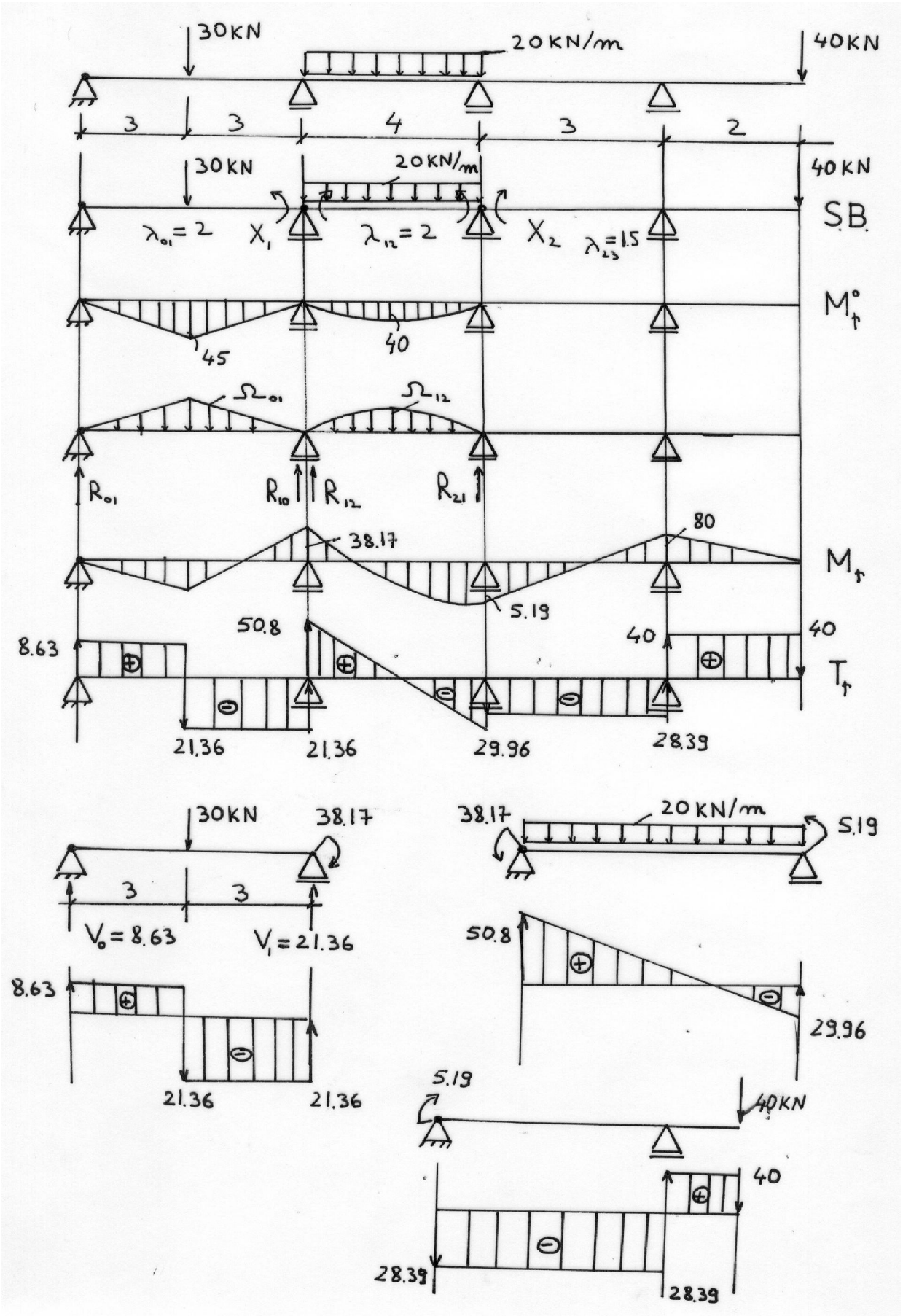


Fig.1.12 Exemplu rezolvare grindă continuă

Calculul reacţiunilor pentru grinda 0-1:

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_o \cdot 6 - 30 \cdot 3 + 38{,}17 = 0 \rightarrow V_0 = 8{,}63KN$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow 30 \cdot 3 - V_1 \cdot 6 + 38{,}17 = 0 \rightarrow V_1 = 21{,}36KN$$

Calculul reacţiunilor pentru grinda 1-2:

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -38{,}17 + V_1 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 - 5{,}19 = 0 \rightarrow V_1 = 50{,}84KN$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -38{,}17 + 20 \cdot 4 \cdot 2 - 5{,}19 - V_2 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_2 = 29{,}16KN$$

Calculul reacţiunilor pentru grinda 2-3:

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow 5{,}19 - V_3 \cdot 3 + 40 \cdot 5 = 0 \rightarrow V_3 = 68{,}39KN$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow 5{,}19 + V_2 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_2 = -28{,}39KN$$

Exemplul 1.4: Pentru grinda continuă din fig. 1.13 să se determine diagrama de moment încovoietor şi de forţe tăietoare din încărcarea cu forţe date şi variaţii de temperatură (fig.1.14).

1) Încărcarea cu forţe date. Calculul lungimilor transformate:

$$\lambda_{01} = 10\,;\, \lambda_{12} = 10\,;\, \lambda_{23} = 10$$

Calcul reacţiunilor R_{ij} :

$$R_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{24} = \frac{10 \cdot 10^3}{24} = 416{,}66$$

$$R_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 180 \cdot 12 = 720$$

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6 \frac{I_o}{I_{ij}} R_{ji} - 6 \frac{I_o}{I_{jk}} R_{jk}$$

Secţiunea 1:

$$2(10+10) X_1 + 10 X_2 = -6 \frac{I}{I} 416{,}6 - 6 \frac{I}{1{,}2I} 720$$

Secţiunea 2:

$$10 X_1 + 2(10+10) X_2 = -6 \frac{I}{1{,}2I} 720$$

$$20 X_1 + 10 X_2 = -6099{,}6$$

$$10 X_1 + 20 X_2 = -3600$$

$$X_1 = -286{,}6$$

$$X_2 = -36{,}68$$

Diagrama de momente M_p este prezentată în fig.1.13

Pentru trasarea diagramei de forţă tăietoare se izolează fiecare grindă şi se încarcă cu sarcinile exterioare şi momentele de capăt:

Grinda 0-1:

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow 10 \cdot 10 \cdot 5 - V_1 \cdot 10 + 286{,}6 = 0 \rightarrow V_1 = 78{,}66KN$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_0 \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 5 + 286{,}6 = 0 \rightarrow V_0 = 21{,}34KN$$

Grinda 1-2:

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -286{,}6 + 36{,}68 - V_2 \cdot 12 + 10 \cdot 12 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_2 = 39{,}17$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -286{,}6 + V_1 \cdot 12 - 10 \cdot 12 \cdot 6 + 36{,}68 = 0 \rightarrow V_1 = 80{,}82$$

Grinda 2-3:

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow -36{,}68 + V_2 \cdot 10 = 0 \rightarrow V_2 = 3{,}66KN$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -36{,}68 + V_3 \cdot 10 = 0 \rightarrow V_3 = 3{,}66KN$$

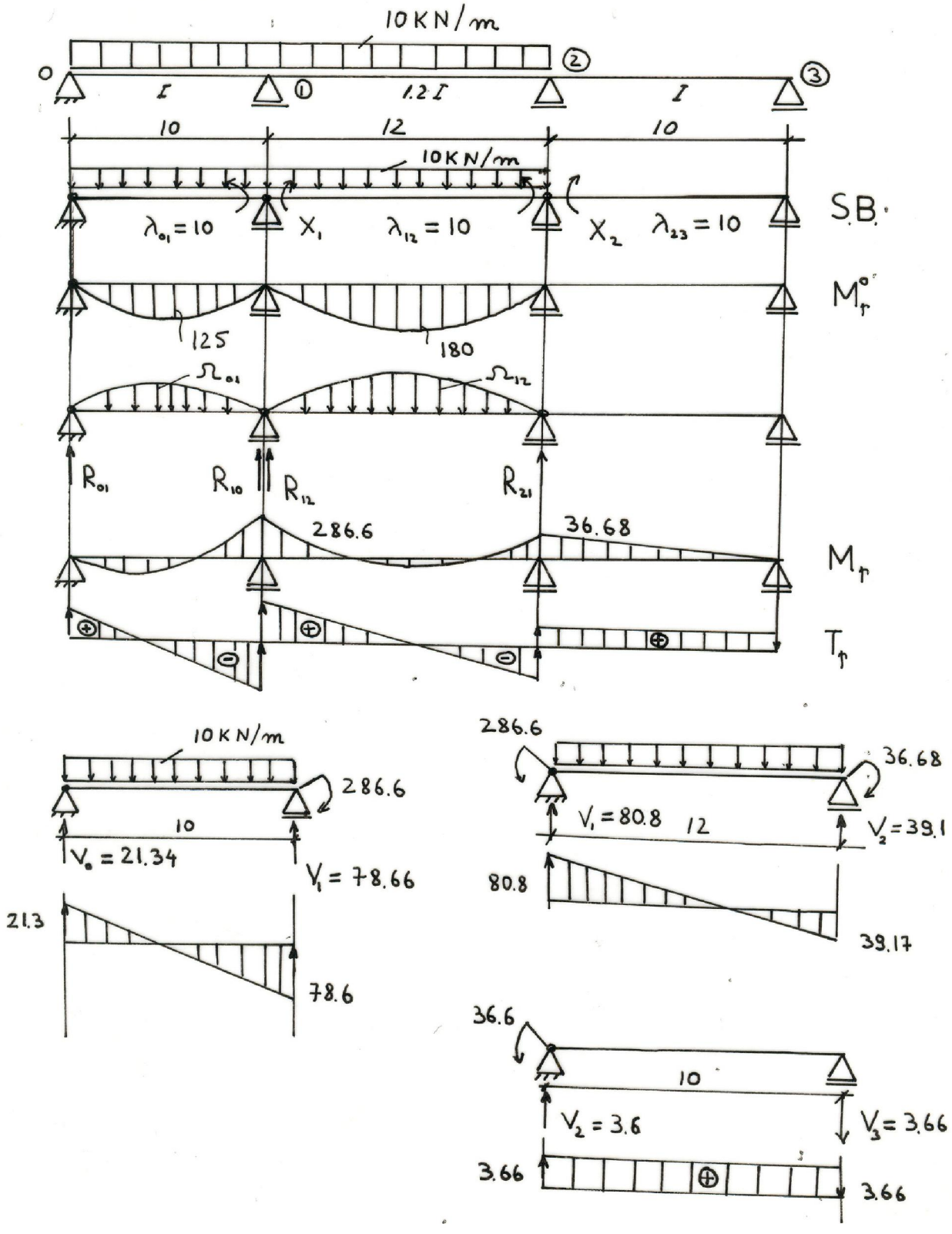


Figura 1.13 Exemplu calcul grindă continuă

2)Încărcarea cu variaţii de temperatură (figura 1.14). Ecuaţia celor trei momente este:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij}+\lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k + 3\alpha EI_o\left(\frac{\Delta t_{ij}}{h_{ij}}l_{ij} + \frac{\Delta t_{jk}}{h_{jk}}l_{jk}\right) = 0$$

$$E = 200.000daN/cm^2 = 2\cdot 10^7 KN/m^2;\ I_o = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4^3}{12} = 16\cdot 10^{-4}m^4\ \alpha = 10^{-5}$$

$$\alpha EI_o = 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^7\cdot 16\cdot 10^{-4} = 32\cdot 10^{-2} = 0{,}32KNm^2$$

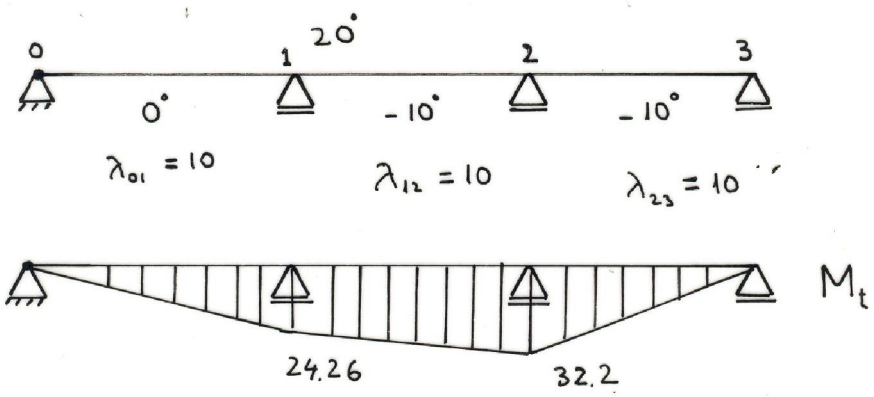


Figura 1.14 Diagramă de moment grindă continuă din încărcare cu variaţie de temperatură

$$\Delta t_{01} = 0 - 20 = -20$$

$$\Delta t_{12} = -10 - 20 = -30$$

$$\Delta t_{23} = -10 - 20 = -30$$

$$40X_1 + 10X_2 + 3\cdot 0{,}32\left(-\frac{20}{0{,}4}\cdot 10 - \frac{30}{0{,}425}\cdot 12\right) = 0$$

$$10X_1 + 40X_2 + 3\cdot 0{,}32\left(-\frac{30}{0{,}425}\cdot 12 - \frac{30}{0{,}4}\cdot 10\right) = 0$$

$$40X_1 + 10X_2 - 1293{,}1 = 0$$

$$10X_1 + 40X_2 - 1533{,}1 = 0$$

$$X_1 = 24{,}26KNm;\ X_2 = 32{,}26KNm$$

Exemplul 1.5 : Pentru grinda continuă din figura 1.15 să se traseze diagrama de moment încovoietor.

Calculul lungimilor transformate:

$$I_0 = I;\ \lambda_{01} = 6\frac{I}{2I} = 3;\ \lambda_{12} = 6\frac{I}{2I} = 3;\ \lambda_{23} = 4\frac{I}{I} = 4$$

Calculul reacţiunilor fictive:

$$\Omega_{01} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 60\cdot 3 = 180$$

$$\Omega_{12} = \frac{2}{3}\cdot 45\cdot 6 = 180$$

$$\Omega_{23}{}^1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{10\cdot 4^2}{8}\cdot 4 = 53{,}33;\ \Omega_{23}{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 2 = 20$$

$$R_{01} = \frac{\Omega_{01}}{2} = \frac{180}{2} = 90;\ R_{10} = 90$$

$$R_{12} = R_{21}\frac{\Omega_{12}}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

$$R_{23}^{\ 1} = R_{32}^{\ 1} = \frac{\Omega_{23}^{\ 1}}{2} = \frac{53{,}33}{2} = 26{,}66$$

$$R_{23}^{\ 2} = \frac{1}{3}\Omega_{23}^{\ 2} = \frac{1}{3}\cdot 20 = 6{,}66\,;\ R_{32}^{\ 2} = \frac{2}{3}\Omega_{23}^{\ 2} = 13{,}33$$

$$R_{23} = 26{,}66 - 6{,}66 = 20\,;\ R_{32} = 26{,}66 - 13{,}33 = 13{,}33$$

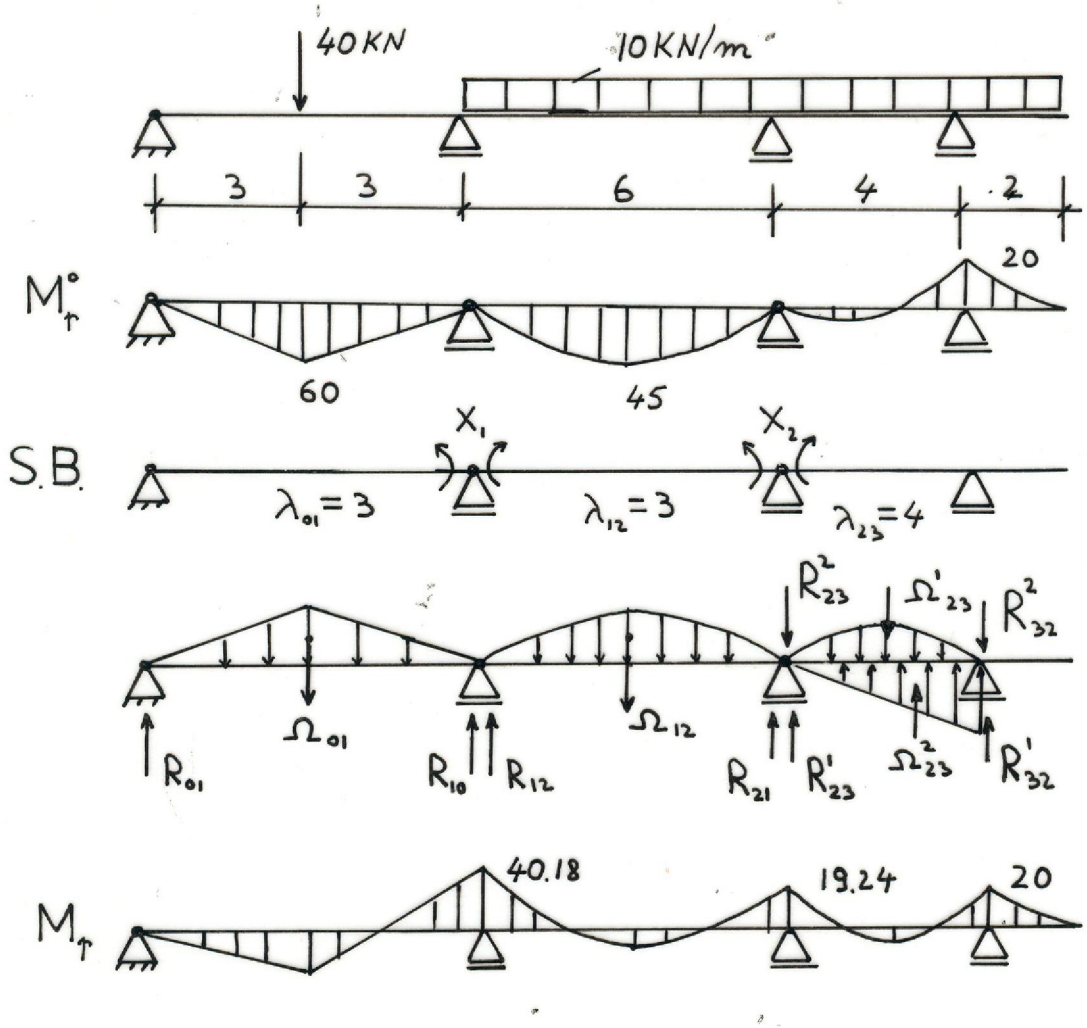


Fig.1.15 Calcul grindă continuă cu consolă şi deschidere adiacentă încărcată

Sistemul de ecuaţii capătă forma:

$$2(3+3)X_1 + 3X_2 = -6\frac{I}{2I}90 - 6\frac{I}{2I}90$$

$$3X_1 + 2(3+4)X_2 = -6\frac{I}{2I}90 - 6\frac{I}{I}20$$

sau:

$$\begin{matrix} 12X_1 + 3X_2 = -540 \\ 3X_1 + 14X_2 = -390 \end{matrix} \text{ astfel: } \begin{matrix} X_1 = -40{,}18 \\ X_2 = -19{,}24 \end{matrix}$$

Diagrama finală de moment încovoietor este prezentată în figura 1.15.

1.6 Grinzi cu o singură deschidere static nedeterminate

Grinzile cu o singură deschidere, static nedeterminate, au o importanţă deosebită în rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda deplasărilor. În continuare se prezintă calculul eforturilor pentru cîteva cazuri, iar pentru altele se dau valorile momentelor încovoietoare din secţiunile de la capetele barei, direct în tabel.

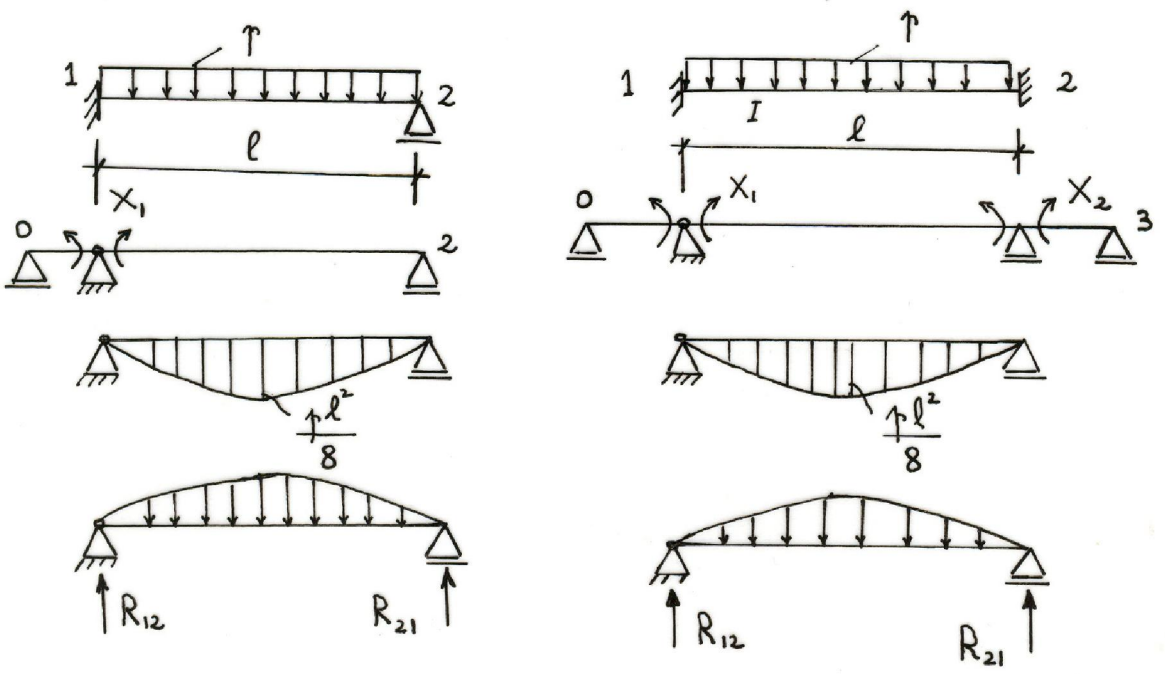


Fig.1.16 Grinzi cu o singură deschidere static nedeterminate

Grinda din figura1.16a este o singură dată static nedeterminată . Lungimea transformată, pentru I_0=I, este λ=l, iar reacţiunea fictivă $R_{12} = \frac{1}{2}\Omega_{12} = \frac{pl^3}{24}$

Ecuaţia de condiţie are forma:

$$2lX_1 = -6 \cdot \frac{pl^3}{24}$$

de unde rezultă: $X_1 = -\frac{pl^2}{8}$

Grinda din figura1.16b este de două ori static nedeterminată. Lungimea transformată λ_{12}=l iar reacţiunile fictive au valorile $R_{12} = R_{21} = \frac{pl^3}{24}$

Sistemul ecuaţiilor de condiţie are forma:

$$2lX_1 + lX_2 = -6\frac{pl^3}{24}$$

$$lX_1 + 2lX_2 = -6\frac{pl^3}{24}$$

de unde rezultă: $X_1 = -\frac{pl^2}{12}$ K $X_2 = -\frac{pl^2}{12}$

În figura 1.17 se prezintă centralizat diagramele şi momentele de încastrare perfectă pentru o bară tip dublu încastrată sau încastrată-articulată, încărcată cu forţă uniform distribuită sau forţe concentrate.

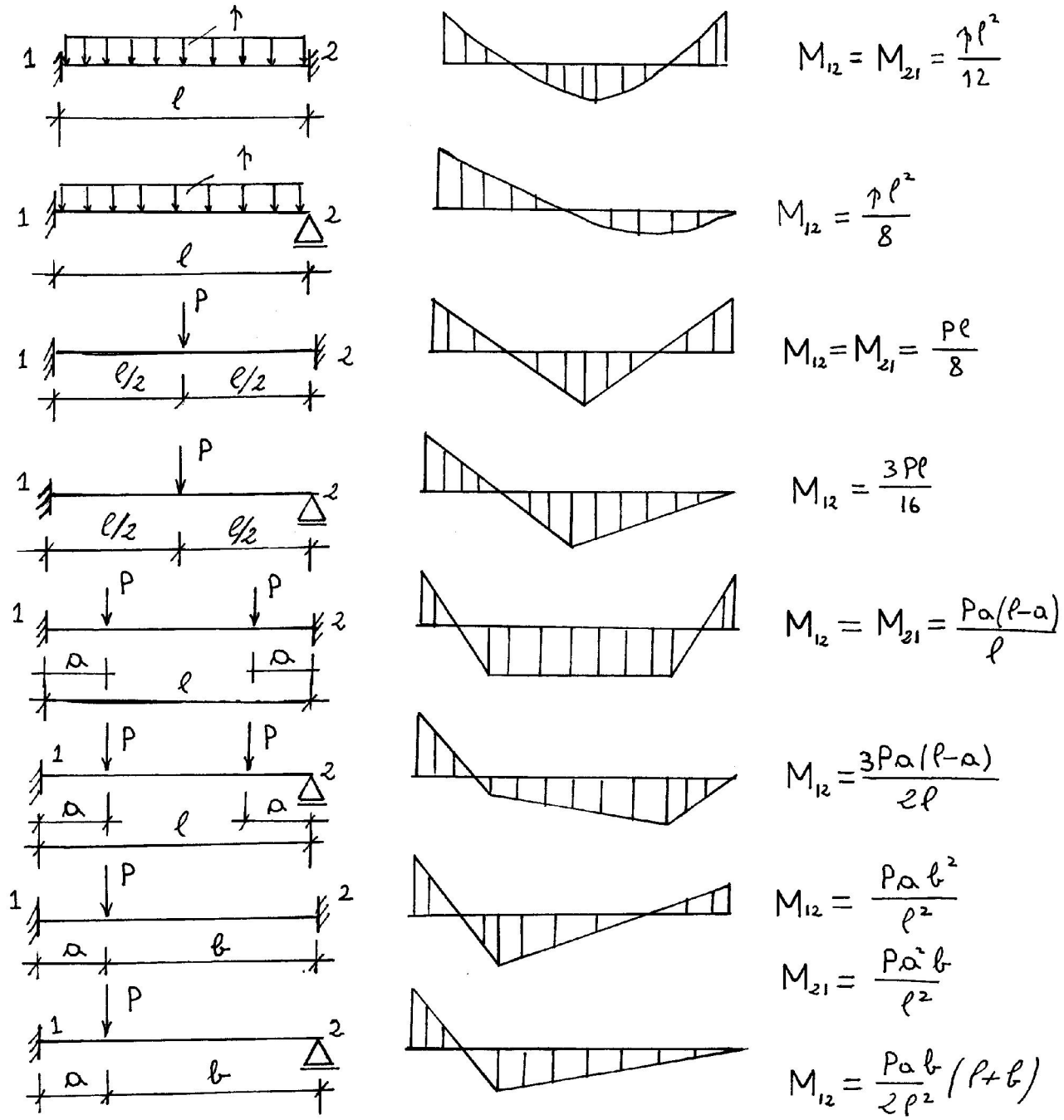


Fig.1.17 Diagramele şi momentele de încastrare perfectă pentru o bară tip dublu încastrată sau încastrată-articulată, încărcată cu forţă uniform distribuită sau forţe concentrate.

CAP.2 ARCE STATIC NEDETERMINATE. GRINZI CU ZĂBRELE STATIC NEDETERMINATE

2.1 ARCE STATIC NEDETERMINATE

2.1.1 Introducere

Arcele static nedeterminate se rezolvă prin metoda eforturilor. Aşa cum a fost arătat şi la arcele static determinate, comparativ cu o grindă dreaptă simplu rezemată de aceeaşi deschidere, un arc de aceeaşi lungime, are la aceeaşi încărcare cu grinda, o diagramă de moment cu valori mai reduse decît grinda dreaptă simplu rezemată. Acesta este avantajul arcelor static determinate sau nedeterminate.

În cazul arcelor la calculul deplasărilor elastice nu se mai neglijează termenul corespunzător efortului axial. Acest lucru este pus în evidenţă prin relaţia 2.1.

$$(2.1)\ \mathrm{K}\,\Delta_i = \int \frac{M_p m_i}{EI} dx + \int \frac{N_p n_i}{EA} dx$$

Deoarece axa arcului este curbă, integralele din expresia Maxwell Mohr trebuie calculate direct deorece diagramele unitare au variaţie neliniară şi nu se mai poate aplica regula de integrare Vereşceaghin.

Tipurile de arce static nedeterminate sînt:

-arcul dublu articulat fig.2.1a

-arcul cu tirant fig2.1b

-arcul dublu încastrat fig.2.1c

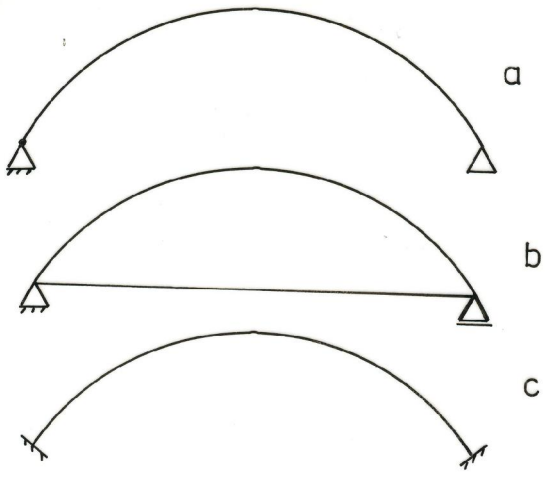


Fig.2.1 Arce static nedeterminate

2.1.2 Arcul dublu articulat

Arcul dublu articulat (fig.2.2a) are o legătură în plus faţă de minimul necesar pentru asigurarea fixării în plan şi a invariabilităţii geometrice. Astfel este o structură static nedeterminată. Sistemul de bază în metoda eforturilor se obţine suprimînd o legătură. Sistemul de bază poate fi ori un arc simplu rezemat (fig.2.2b) ori un arc cu trei articulaţii (fig.2.2c).

Cel mai indicat sistem de bază îl reprezintă arcul simplu rezemat deoarece prezintă avantajul că la încărcarea cu forţe, momentele încovoietoare sînt mari şi se poate neglija deformarea din eforturi axiale faţă de deformarea din încovoiere. Pentru acest sistem de bază necunoscuta va fi împingerea X_1 (fig.2.2b).

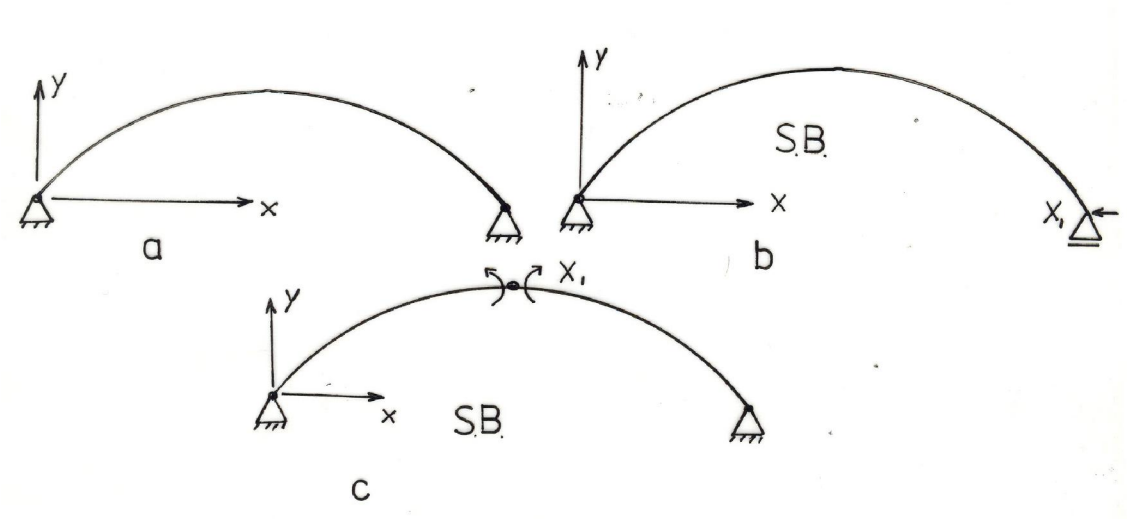


Fig.2.2 Sisteme de bază pentru un arc dublu articulat

Se consideră arcul dublu articulat din fig.2.2a încărcat cu forţe verticale şi sistemul de bază din fig.2.2b.

Ecuaţia de condiţie are forma:

$$(2.2)\ \mathrm{K}\ \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta X_1=1, eforturile ce apar în secţiunea curentă sînt:

$$m_1 = -y\ \mathrm{K}\ n_1 = -\cos\phi$$

Deplasarea unitară δ_{11} şi termenul liber Δ_{1p} au expresiile:

$$(2.3)\ \mathrm{K}\ \delta_{11} = \int \frac{m_1^{\ 2}}{EI}ds + \int \frac{n_1}{EA}ds = \int \frac{y^2}{EI}ds + \int \frac{\cos^2\phi}{EA}ds$$

$$(2.4)\ \mathrm{K}\ \Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^{\ 0}}{EI}ds + \int \frac{n_1 N_p^{\ 0}}{EA}ds = -\int \frac{y M_p^{\ 0}}{EI}ds - \int \frac{N_p^{\ 0}\cos\phi}{EA}ds$$

Presupunînd că arcul are secţiunea variabilă şi că se aleg ca elemente de comparaţie momentul de inerţie şi aria secţiunii de la cheie (I_0 A_0) expresiile devin:

$$(2.5)\ \mathrm{K}\ EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I}y^2 ds + \int \frac{I_0}{A}\cos^2\phi ds$$

$$(2.6)\ \mathrm{K}\ EI_0\Delta_{1p} = -\int \frac{I_0}{I}yM_p^{\ 0}ds - \int \frac{I_0}{A}N_p^{\ 0}\cos\varphi ds$$

Introducînd expresiile (2.5), (2.6) în ecuaţia de condiţie se obţine expresia necunoscutei X_1 sub forma:

$$(2.7)\ \mathrm{K}\ X_1 = H = \frac{\int \frac{I_0}{I}yM_p^{\ 0}ds + \int \frac{I_0}{A}N_p^{\ 0}\cos\phi ds}{\int \frac{I_0}{I}y^2 ds + \int \frac{I_0}{A}\cos^2\phi ds}$$

Astfel pentru forţe verticale şi sistemul de bază arc simplu rezemat integrala a doua de la numărător se poate neglija în raport cu prima, deoarece efectul efortului axial este mic în comparaţie cu efectul momentului încovoietor. La numitor integrala a doua are valori mici faţă de prima, pentru acest termen făcîndu-se o serie de aproximaţii.

Se consideră că aria secţiunii transversale variază după legea $A=A_0\cos\varphi$ şi că $ds\cos\varphi=dx$, cel de-al doilea termen de la numitor capătă forma:

$$(2.8)\ \text{K}\ \frac{I_0}{A}\cos^2\phi ds = \int_0^l \frac{I_0}{A_0\cos\phi}\cos^2\phi\frac{dx}{\cos\phi} = \int_0^l \frac{I_0}{A_0}dx = li_0^{\ 2}$$

unde l este deschiderea arcului iar i_0 raza de inerţie a secţiunii de la cheie, aleasă ca element de comparaţie.

Făcînd aceste substituţii, expresia necunoscutei X_1, pentru arce încărcate cu forţe verticale, devine:

$$(2.9)\ \text{K}\ X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} yM_p^{\ 0}}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0^{\ 2}}$$

Eforturile în secţiunea curentă se obţin prin suprapunerea de efectelor pe sistemul de bază cu relaţiile:

$$(2.10)\quad \begin{aligned} M_p &= M_p^{\ 0} + m_1 X_1 = M_p^{\ 0} - yX_1 \\ N_p &= N_p^{\ 0} + n_1 X_1 = N_p^{\ 0} - X_1\cos\phi \end{aligned}$$

Atît termenul $M_p^{\ 0}$ cît şi termenul yX_1 au cam acelaşi ordin de mărime. Expresia lui M_p este formată din diferenţa celor doi termeni şi în consecinţă necunoscuta X_1 trebuie calculată cu o precizie suficientă.

Integralele din expresia necunoscutei X_1 se pot efectua direct pentru cazuri simple de încărcare. În calculele practice aceste integrale se efectuează numeric. Pentru aceasta se împarte arcul în bolţari care au de obicei aceeaşi proiecţie pe orizontală Δx sau aceeaşi lungime Δs şi pe care se consideră că secţiunea este constantă.

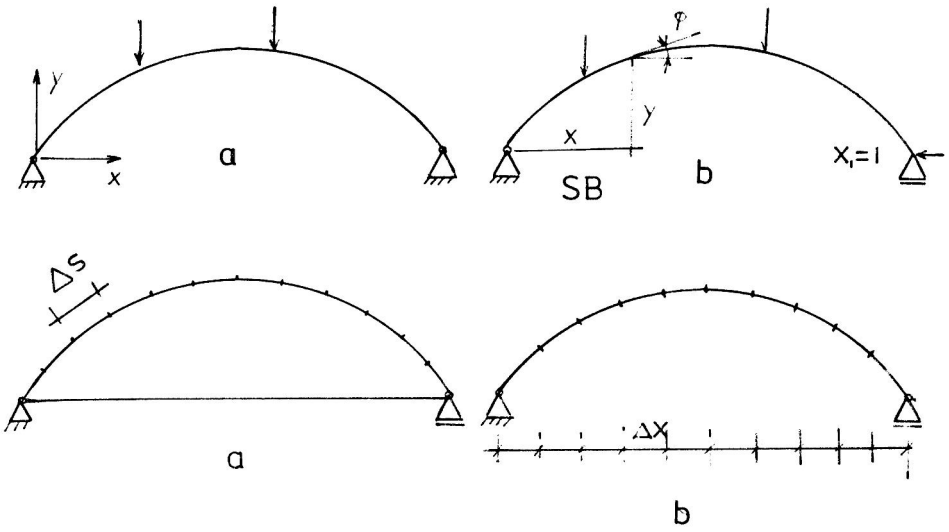


Fig.2.3 Împărţirea în bolţari a arcului dublu articulat

Elementele ce alcătuiesc expresia necunoscutei se calculează pentru secţiunea din centrul de greutate al bolţarului.

Expresia necunoscutei X_1 capătă forma:

$$(2.11)\ \text{K}\ X_1 = \frac{\sum \frac{I_0}{I} yM_p^{\ 0}\Delta s}{\sum \frac{I_0}{I} y^2\Delta s + li_0^{\ 2}} = \frac{\sum M_p^{\ 0} yW}{\sum y^2 W + li_0^{\ 2}} \quad \text{în care} \quad W = \frac{I_o}{I}\Delta s$$

2.1.3 Arcul cu tirant

Arcul cu tirant se foloseşte atunci cînd reazemele nu pot prelua împingerile orizontale. Sistemul de bază folosit în acest caz este arcul simplu rezemat, iar necunoscuta X_1 o reprezintă efortul din tirant. Datorită faptului că tirantul are o flexibilitate, relaţiile de calcul care s-au stabilit la arcul dublu articulat vor fi modificate.

Fie arcul cu tirant din fig. 2.4a încărcat cu forţe verticale şi sistemul de bază din figură.

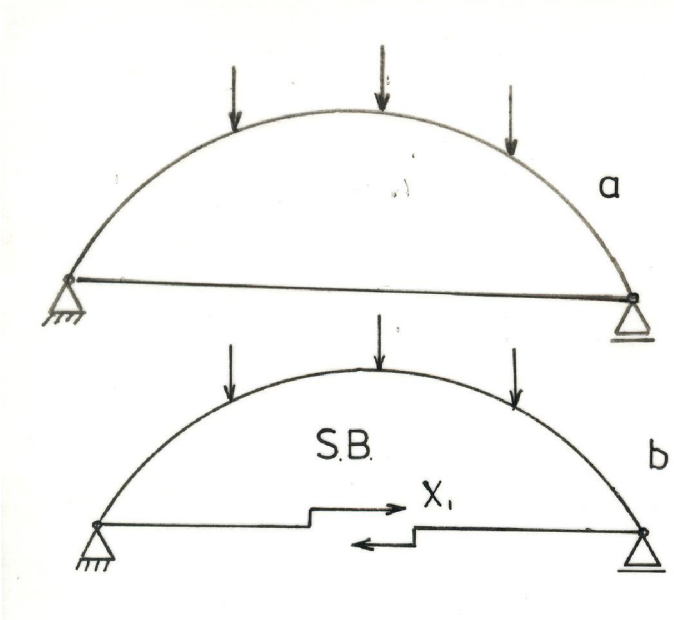


Fig.2.4 Sistem de bază pentru un arc cu tirant

Din încărcarea cu necunoscuta $X_1=1$, apare efort axial şi în tirant $n_t=1$. În calculul coeficientului necunoscutei, δ_{11} trebuie să se ţină seama şi de acest efort.

Efortul în tirant nu apare datorită încărcării sistemului de bază cu sarcinile exterioare.

Expresia coeficientului necunoscutei este:

$$(2.12)\ \mathrm{K}\ \delta_{11} = \int \frac{m_1^{\ 2}}{EI} ds + \int \frac{m_1^{\ 2}}{EA} ds + \int \frac{n_t^{\ 2}}{E_t A_t} dx$$

sau ţinînd seama că $m_1=-y$, $n_1=\cos\varphi$ şi $n_t=1$ rezultă:

$$(2.13)\ \mathrm{K}\ EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\phi ds + \int \frac{EI_0}{E_t A_t} dx$$

Introducînd şi în acest caz aproximaţiile făcute la arcul dublu articulat şi notînd $i_t^{\ 2} = \frac{EI_0}{E_t A_t}$ expresia 2.13 devine:

$$(2.14)\ \mathrm{K}\ EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0^{\ 2} + li_t^{\ 2}$$

Necunoscuta X_1 care de această dată reprezintă efortul din tirant, capătă expresia:

$$(2.15)\ \mathrm{K}\ X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p{}^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l(i_0{}^2 + i_t{}^2)}$$

2.1.4 Arcul dublu încastrat

Arcul dublu încastrat are trei legături în plus faţă de numărul minim necesar asigurării invariabilităţii geometrice şi fixării cu baza de susţinere, în consecinţă este de trei ori static nedeterminat.

Calculul arcelor dublu încastrate se efectuează utilizînd un procedeu specific de ortogonalizare a diagramelor unitare, denumit procedeul transferării necunoscutelor în centrul elastic. În acest mod sistemul general de trei ecuaţii cu trei necunoscute se transformă într-un sistem de trei ecuaţii fiecare conţinînd cîte o singură necunoscută.

Fie arcul dublu încastrat din fig 2.5 şi sistemul de bază obţinut prin secţionarea arcului în secţiunea de la cheie.

Sistemul general de ecuaţii de condiţie are forma:

$$\begin{aligned} &\mathrm{K}\ \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ (2.16)\ &\mathrm{K}\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ &\mathrm{K}\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{aligned}$$

Observînd că sistemul de bază este simetric, şi că necunoscutele X_1 şi X_2 sînt simetrice iar necunoscuta X_3 este antisimetrică rezultă $\delta_{13}= \delta_{31}=0$, $\delta_{23}= \delta_{32}=0$. Cu aceste condiţii sistemul de ecuaţii (2.16) devine:

$$\begin{aligned} &\mathrm{K}\ \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ (2.17)\ &\mathrm{K}\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ &\mathrm{K}\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{aligned}$$

Pentru ca să obţinem numai ecuaţii cu o singură necunoscută diagramele simetrice m_1 şi m_2 trebuie să fie ortogonalizate astfel încît $\delta_{12}= \delta_{21}=0$. Pentru aceasta se aplică procedeul transferării necunoscutelor în centrul elastic (fig.2.5)

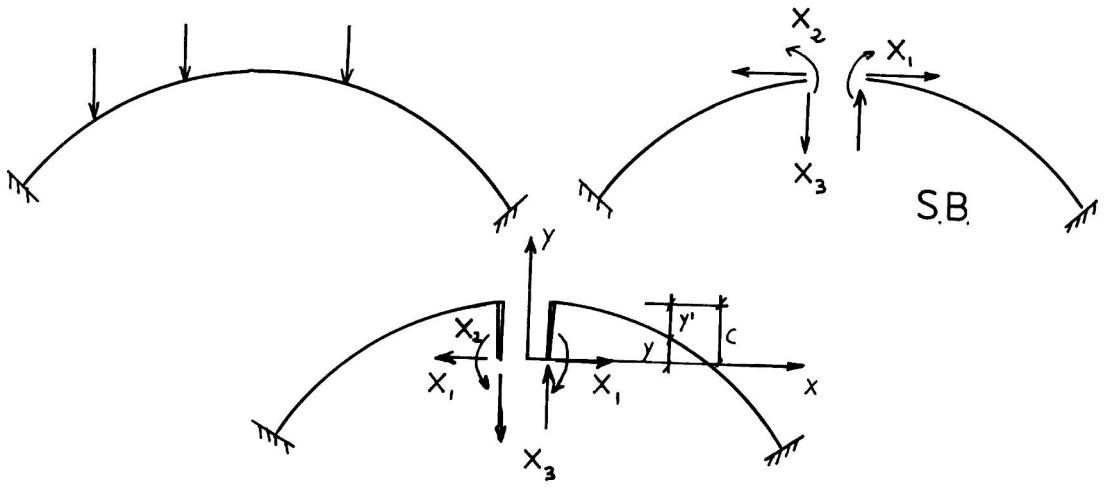


Fig.2.5 Sistem de bază pentru un arc dublu încastrat

Se ataşează fiecărei jumătăţi de arc cîte o consolă rigidă în extremităţile cărora se transferă necunoscutele. Din condiţia ca $\delta_{12}= \delta_{21}=0$ se obţine lungimea consolelor notată cu litera c.
Diagramele unitare de moment încovoietor sînt prezentate în fig. 2.6

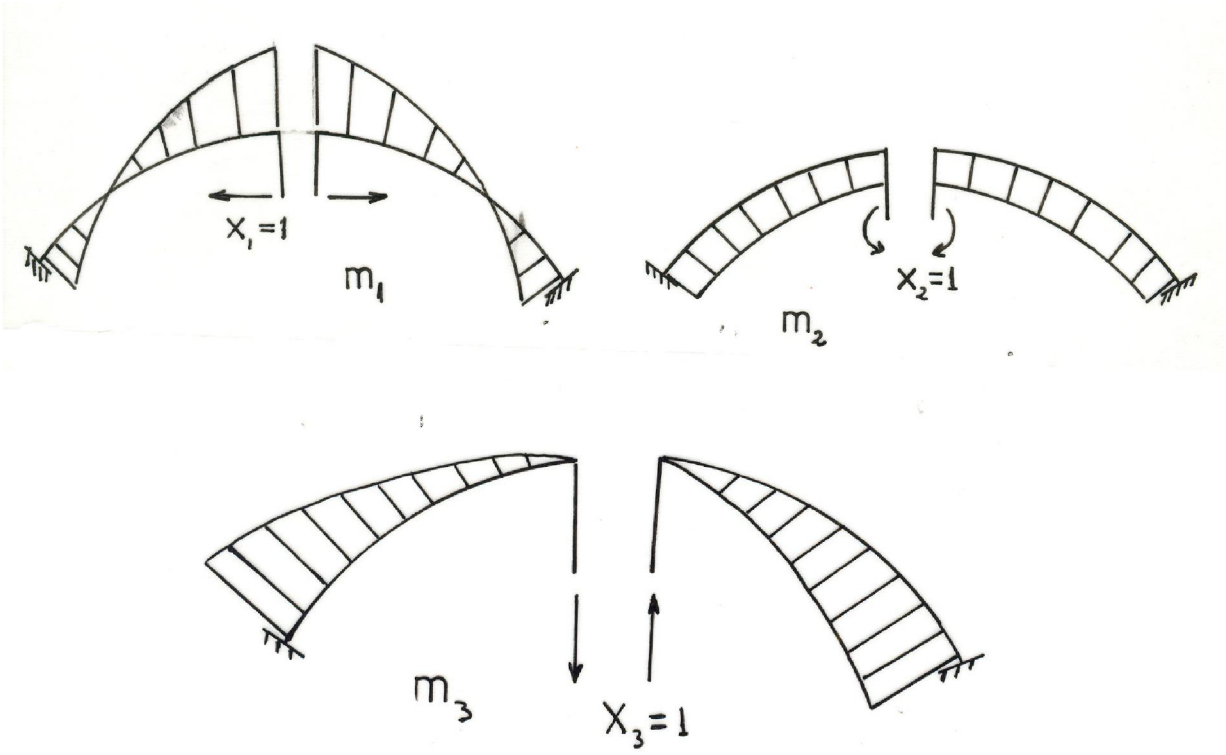


Fig.2.6 Diagrame unitare pentru arcul dublu încastrat

Expresiile eforturilor unitare produse de cele trei necunoscute pe sistemul de bază sînt:

$$m_1 = -y \quad \text{K} \, n_1 = -\cos\phi$$

(2.18) $m_2 = 1 \quad \text{K} \, n_2 = 0$

$$m_3 = x \quad \text{K} \, n_3 = \sin\phi$$

Expresia coeficientului δ_{12} devine:

$$(2.19) \, \text{K} \, EI_0\delta_{12} = -\int \frac{I_0}{I} y \cdot 1 \cdot ds = 0$$

sau

$$(2.20) \, \text{K} \int \frac{I_0}{I} yds = 0$$

Exprimînd ordonata secţiunii curente y în raport de c se obţine y=c-y' unde y' se măsoară de la cheie.
Condiţia (2.20) devine:

$$(2.21) \, \text{K} \int \frac{I_0}{I} yds = \int \frac{I_0}{I} cds - \int \frac{I_0}{I} y' ds = 0$$

de unde se obţine c-distanţa de la cheie la centrul elastic (originea sistemului de axe xoy).

$$(2.22) \, \text{K} \, c = \frac{\int \frac{I_0}{I} y' ds}{\int \frac{I_0}{I} ds}$$

în aceste condiţii sistemul de ecuaţii devine:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

(2.23) $$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

Ţinînd seama de expresiile eforturilor unitare, coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi din ecuaţia (2.23) capătă forma:

(2.24) K $$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \phi ds$$

(2.25) K $$EI_0\delta_{22} = \int \frac{I_0}{I} ds$$

(2.26) K $$EI_0\delta_{33} = \int \frac{I_0}{I} x^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \sin^2 \phi ds$$

(2.27) K $$EI_0\Delta_{1p} = \int -\frac{I_0}{I} yM_p{}^0 ds - \int \frac{I_0}{A} N_p{}^0 \cos\phi ds$$

(2.28) K $$EI_0\Delta_{2p} = \int \frac{I_0}{I} M_p{}^0 ds$$

(2.29) K $$EI_0\Delta_{3p} = \int \frac{I_0}{I} xM_p{}^0 ds + \int \frac{I_0}{A} N_p{}^0 \sin\phi ds$$

Se consideră şi aici aproximaţiile făcute la arcul dublu articulat şi se introduc în plus următoarele aproximaţii:

(2.30) K $$\int \frac{I_0}{A} \sin^2 \phi ds \approx 0, \int \frac{I_0}{A} N_p{}^0 \sin\phi ds \approx 0$$

Necunoscutele din sistemul de ecuaţii capătă expresiile:

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} yM_p{}^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0{}^2}$$

(2.31) $$X_2 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} M_p{}^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} ds}$$

$$X_3 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} xM_p{}^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} x^2 ds}$$

În cazul în care rezolvarea se efectuează prin bolţari expresia coordonatei centrului elastic şi expresiile necunoscutelor devin:

(2.32) K $$c = \frac{\sum y'W}{\sum W}$$

(2.33) K $$X_1 = \frac{\sum yM_p{}^0 W}{\sum y^2 W + li_0{}^2}\ ,\ X_2 = -\frac{\sum M_p{}^0 W}{\sum W},\ X_3 = -\frac{\sum xM_p{}^0 W}{\sum x^2 W}$$

După determinarea necunoscutelor, eforturile în orice secţiune a arcului se obţin prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază.

(2.34) K $$M = M_p{}^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3 = M_p{}^0 - X_1y + X_2x + X_3$$

(2.35) K $N = N_p{}^0 + n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 = N_p{}^o - X_1\cos\phi + X_2\sin\phi$

Dacă forţele sînt simetrice se rezolvă numai necunoscutele simetrice, iar dacă forţele sînt antisimetrice se rezolvă numai necunoscutele antisimetrice.

Dacă forţele sînt simetrice, X_3=0, iar dacă sînt antisimetrice X_1=0,X_2=0.

Calculul necunoscutelor şi apoi al eforturilor se face întabulat.

Exemplul 2.1: Să se traseze diagrama de moment încovoietor şi de efort axial pentru arcul parabolic dublu articulat din fig.2.7 .Secţiunea transversală are dimensiunile bxh=40x60cm^2.

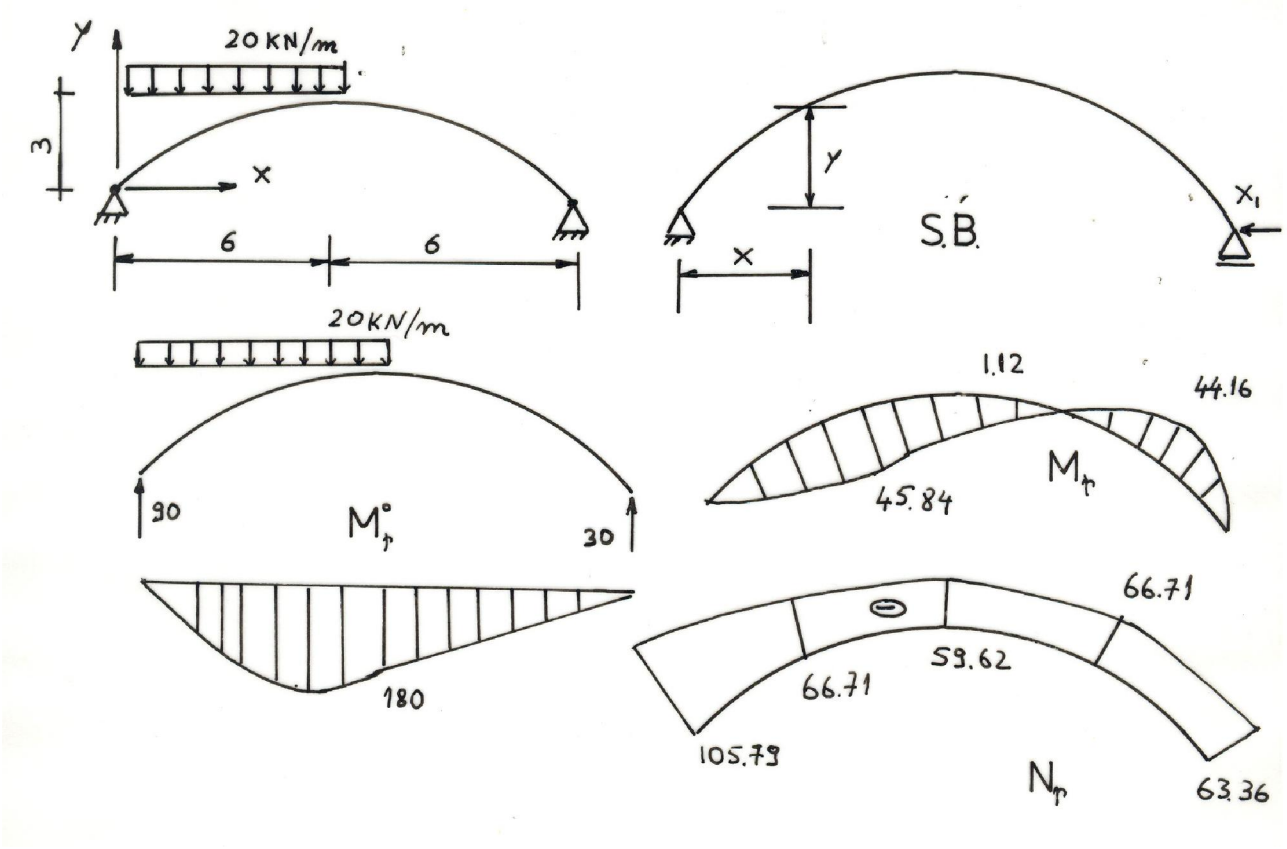


Fig.2.7 Arc parabolic dublu articulat

Pe prima jumătate a arcului $M_p{}^0 = 90x - 20x\frac{x}{2} = 90x - 10x^2$

$$\int yM_p{}^0 ds = \int_0^{l/2} \frac{4fx(l-x)}{l^2}(90x - 10x^2)dx = 2106$$

Pe jumătatea din dreapta a arcului $M_p{}^0 = 30x$

$$\int yM_p{}^0 ds = \int_0^{l/2} \frac{4fx(l-x)}{l^2}30xdx = 1350$$

Deci $\int yM_p{}^0 ds = 2106 + 1350 = 3456$

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0{}^2$$

$$\int y^2 ds = \int_0^{l/2} \frac{16f^2x^2(l-x)^2}{l^4}dx = \frac{8lf^2}{15} = 57{,}6$$

$$li_0^2 = l\frac{I}{A} = l\frac{h^2}{12} = 12\frac{0,6^2}{12} = 0,36$$

$$\delta_{11} = 57,96$$

Calculul necunoscutei $X_1 = \frac{3456}{57,96} = 59,62$

Calculul momentelor încovoietoare:

-secţiunea de la cheie

$M_c = 180 - 3 \cdot 59,62 = 1,12KNm$

-secţiunea de la sfert pe jumătatea din stînga a arcului

$M_s = 90 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - \frac{3}{4}3 \cdot 59,62 = 45,84KNm$

-secţiunea de la sfert pe jumătatea din drepta a arcului

$M_s = 30 \cdot 3 - \frac{3}{4}3 \cdot 59,62 = -44,16KNm$

Calculul forţelor axiale:

-secţiunea A: $\cos\phi_a = 0,707; \sin\phi_a = 0,707$

$N_a = -90\sin\phi_a - 59,62\cos\phi_a = -105,79KN$

-secţiunea de la sfert pe jumătatea din stînga a arcului $\cos\phi_s = 0,894; \sin\phi_s = 0,447$

$N_s = -90\sin\phi_s - 59,62\cos\phi_s + 20 \cdot 3\sin\phi_s = -66,71KN$

-secţiunea de la cheie: $\cos\phi_c = 1; \sin\phi_c = 0$

$N_c = -59,62\cos\phi_c = -59,62KN$

-secţiunea de la sfert pe jumătatea din dreapta a arcului $\cos\phi_s = 0,894; \sin\phi_s = -0,447$

$N_s = 30\sin\phi_s - 59,62\cos\phi_s = -66,71KN$

-secţiunea B: $\cos\phi_b = 0,707; \sin\phi_b = -0,707$

$N_b = -30 \cdot 0,707 - 59,62 \cdot 0,707 = -63,36KN$

Exemplul 2.2: Să se rezolve arcul parabolic dublu articulate din fig. 2.8 care are secţiunea bxh=60x80cm^2.

Calcul caracteristici geometrice:

$$I = \frac{bh^3}{12} = 0,0256m^4$$

$$A = 0,6 \times 0,8 = 0,48m^2$$

$$i_0^2 = \frac{I}{A} = \frac{0,0256}{0,48} = 5,33 \cdot 10^{-2} m^2;\ ds \approx dx$$

$$\int \frac{I_0}{I} yM_p{}^0 ds = \int yM_p{}^0 dx = 2\int_0^{l/2} y\frac{P}{2}x \cdot dx$$

$$\int \frac{I_o}{I} y^2 ds = \int y^2 dx = 2\int_0^{l/2} y^2 dx$$

Ecuaţia arcului este: $y = \frac{4fx}{l^2}(l - x)$

$$\int yM_p{}^0 dx = 2\frac{P}{2}\frac{4f}{l^2}\int_0^{l/2} x^2(l-x)dx = \frac{5Pl^2 f}{48} = \frac{5\cdot 120\cdot 16^2\cdot 5}{48} = 16000$$

$$\int y^2 dx = 2\frac{16\cdot f^2}{l^4}\int_0^{l/2} x^2(l-x)^2 dx = \frac{8f^2 l}{15} = 213{,}3$$

$$li_0{}^2 = 16\cdot 5{,}33\cdot 10^{-2} = 0{,}85$$

$$X_1 = \frac{\int yM_p{}^0 dx}{\int y^2 dx + li_0{}^2} = \frac{16000}{213{,}3+0{,}85} = 74{,}7KN$$

$$M_3 = M_p{}^0 - yX_1 = \frac{Pl}{4} - fX_1 = 480 - 5\cdot 74{,}7 = 106{,}5KNm$$

$$M_4 = \frac{Pl}{8} - \frac{3}{4}\cdot 5\cdot X_1 = 240 - \frac{3}{4}\cdot 5\cdot 74{,}7 = -40{,}1KNm$$

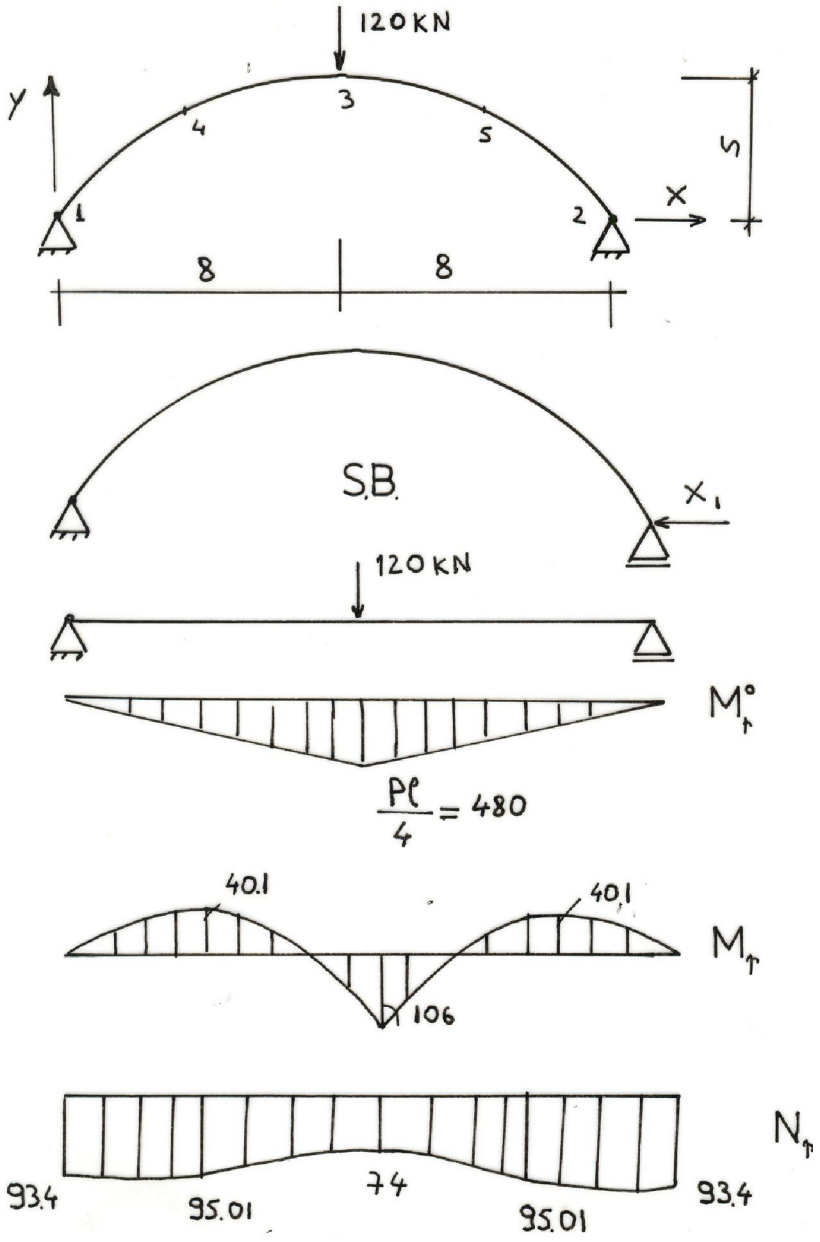


Fig.2.8 Arc parabolic dublu articulat

$N_3 = -X_1 = -74,7$

$N_1 = N_p{}^0 - X_1 \cos\phi = -V_0 \sin\phi_1 - X_1 \cos\phi_1$

$tg\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$

Pentru $x = 0 \rightarrow tg\phi_1 = \frac{4f}{l} = \frac{4 \cdot 5}{16} = 1,25 \rightarrow \phi_1 = 51,34^0$

$\sin\phi_1 = 0,78\,;\ \cos\phi_1 = 0,624$

$N_1 = -60 \cdot 0,78 - 74,7 \cdot 0,624 = -93,4$

$N_4 = -V_0 \sin\phi_4 - X_1 \cos\phi_4$

$tg\phi_4 = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{4 \cdot 5}{16^2}(16 - 2 \cdot 4) = 0,625$

$\phi_4 = 32^0 \rightarrow \sin\phi_4 = 0,529; \cos\phi_4 = 0,847$

$N_4 = -60 \cdot 0,529 - 74,7 \cdot 0,847 = -95,01KN$

Exemplul 2.3: Să se rezolve arcul cu tirant din figura 2.9 considerînd caracteristicile geometrice de la arcul din exemplul 2.2

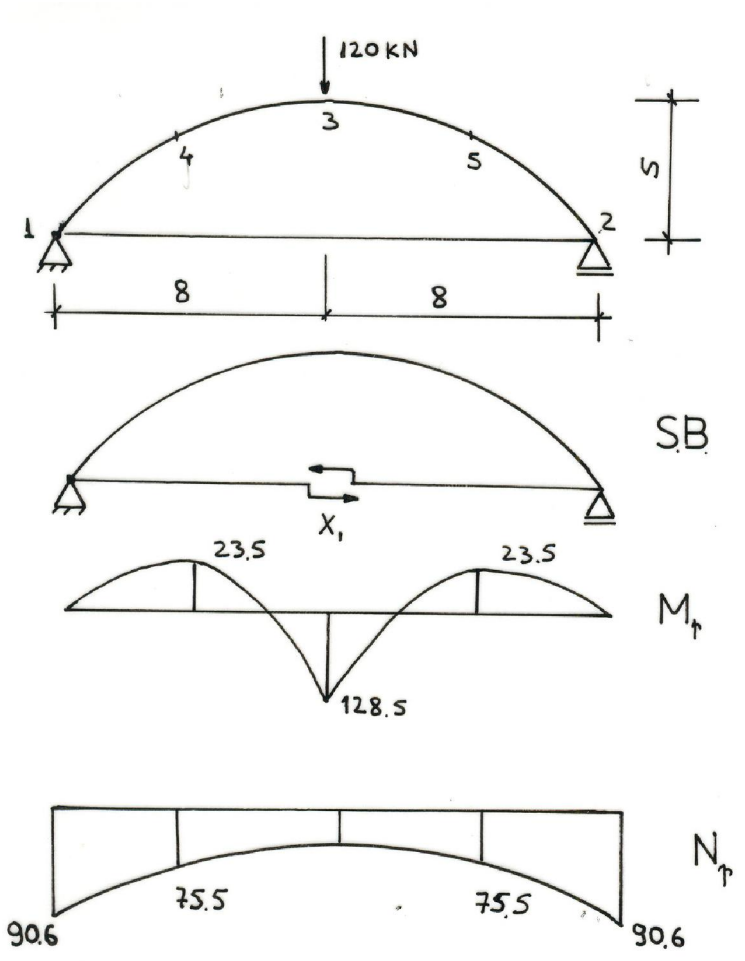


Fig.2.9 Arc cu tirant. Sistem de bază. Diagrame finale de moment şi efort axial

Tirantul ales este din oţel profil I24 avînd aria A=34,8cm^2.

Caracteristicile de material pentru oţel şi beton sînt: $E_b = 240.000 dan/cm^2$;

$E_{otel} = 2.000.000 daN/cm$

Ecuaţia de condiţie are forma: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$

$\delta_{11} = \int y^2 ds + l(i_0{}^2 + i_t{}^2)$;

$$i_t{}^2 = \frac{EI_0}{E_t A_t} = \frac{2{,}4 \cdot 10^7 \cdot 0{,}0256}{2{,}1 \cdot 10^8 \cdot 34{,}8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}84$$

$$li_t{}^2 = 16 \cdot 0{,}84 = 13{,}45$$

$$X_1 = \frac{\int y M_p{}^0 dx}{\int y^2 dx + li_0{}^2 + li_t{}^2} = \frac{16000}{213{,}3 + 0{,}85 + 13{,}45} = 70{,}29 KN$$

Momente încovoietoare:

$$M_3 = M_p{}^0 - yX_1 = \frac{Pl}{4} - fX_1 = 480 - 5 \cdot 70{,}29 = 128{,}5 KN$$

$$M_4 = \frac{Pl}{8} - \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot X_1 = 240 - \frac{3}{4} 5 \cdot 70{,}29 = -23{,}5 KN$$

Eforturi axiale:

$N_3 = -X_1 = -70{,}2$

$N_1 = -V_0 \sin\phi_1 - X_1 \cos\phi_1 = -60 \cdot 0{,}78 - 70{,}2 \cdot 0{,}624 = -90{,}6$

$N_4 = -V_0 \sin\phi_4 - X_1 \cos\phi_4$

$N_4 = -60 \cdot 0{,}529 - 70{,}2 \cdot 0{,}624 = -75{,}5$

Exemplul 2.4 Să se rezolve arcul static nedeterminat din fig.2.10. Arcul este parabolic avînd secţiunea bxh=1x0,6, iar deschiderea arcului l=16m.

Arcul se împarte în bolţari avînd proiecţia pe orizontală de lungime constantă dx=ct.

Centrele de greutate ale bolţarilor i-j s-au notat cu A,B,…H. Proiecţia pe orizontală a unui bolţar a fost aleasă de 1m.

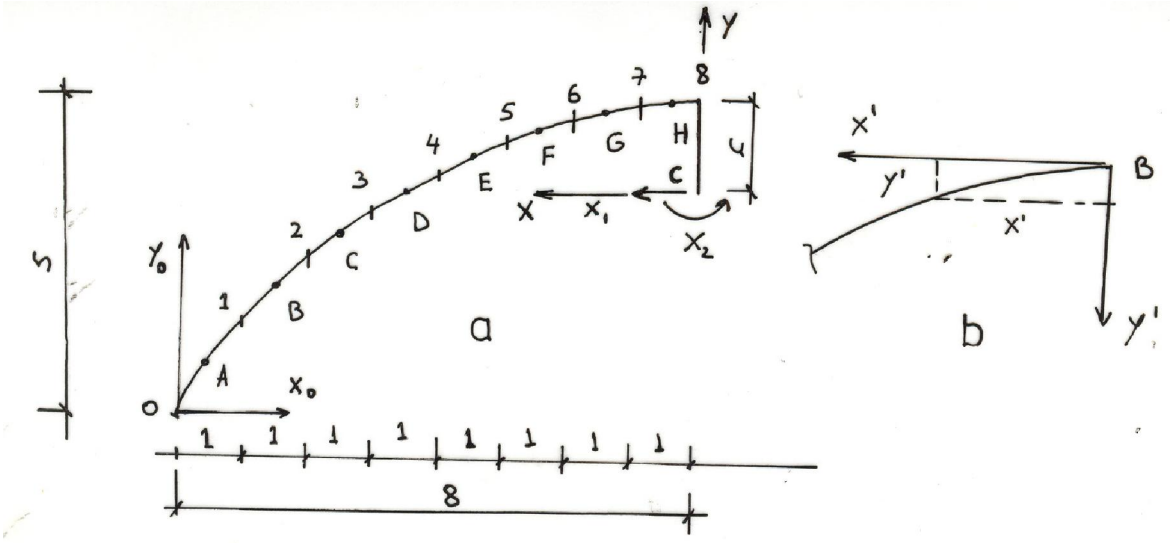


Fig.2.10 Discretizare în bolţari arc dublu încastrat. a)semistructură cu centru elastic şi necunoscutele X_1,X_2; b)sistemul de axe Bx'y'

Secţiunea	X_i’	Y_i’
0	8	5
1	7	3,75
2	6	2,86
3	5	1,96
4	4	1,25
5	3	0,71
6	2	0,32
7	1	0,08
8	0	0

Arcul este încărcat simetric. Forţele pe semistructură sînt: $P_B = 100KN$; $P_D = 100KN$; $P_F = 120KN$; $P_8 = 100KN$

Intervalul	W
0-1	1,600
1-2	1,464
2-3	1,345
3-4	1,226
4-5	1,136
5-6	1,07
6-7	1,02
7-8	1,003

Secţiunea	x’	y’+5	y’
A	0,5	0,605	4,395
B	1,5	1,699	3,301
C	2,5	2,63	2,37

D	3,5	3,417	1,583
E	4,5	4,042	0,958
F	5,5	4,511	0,489
G	6,5	4,824	0,176
H	7,5	4,980	0,02

Secţiunea	y’	W	y’W	y	yW	y^2W
A	4,395	1,6	7,032	-2,185	-3,496	7,638
B	3,301	1,464	7,832	-1,09	-1,595	1,739
C	2,37	1,345	3,187	-0,16	-0,215	0,034
D	1,583	1,226	1,940	0,627	0,768	0,481
E	0,958	1,136	1,088	1,252	1,422	1,78
F	0,489	1,07	0,523	1,721	1,841	3,169
G	0,176	1,02	0,179	2,034	2,074	4,219
H	0,02	1,003	0,02	2,19	2,196	4,81

$$\sum W = 9{,}864\,;\ \sum y'W = 21{,}801;\ c = \frac{\sum y'W}{\sum W} = \frac{21{,}8}{9{,}864} = 2{,}21m\,;$$

$$y_i = c - y_i'$$

$$tg\phi = \frac{4f}{l^2}(l - 2x)$$

$N_p{}^0 = \left(\sum P_i\right)\sin\phi_i$; ϕ_i este unghiul dintre tangenta la curbă cu linia reazemelor

Secţiunea	$M_i = M_{i+1} + (x_{i+1}' - x_i')\sum P_{i+1}$	$\sum P_i$	$\sin\phi_i$	$N_p{}^0$
8	$M_8 = 0$	50	0	0
H	$M_H = 0 - 50(0{,}5 - 0) = -25$	50	0,0778	-3,89
G	$M_G = -25 - 50 \cdot 1 = -75$	50	0,228	-11,4
F	$M_F = -75 - 50 \cdot 1 = -125$	170	0,363	-18,15
				-61,71
E	$M_E = -125 - 170 \cdot 1 = -295$	170	0,479	-81,43
D	$M_D = -295 - 170 \cdot 1 = -465$	270	0,575	-97,75
				-155,2
C	$M_c = -465 - 270 \cdot 1 = -735$	270	0,651	-175,77
B	$M_B = -735 - 270 \cdot 1 = -1005$	370	0,712	-192,2
				-263,4

A	$M_A = -1005 - 370 \cdot 1 = -1375$	370	0,760	-281,2
0	$M_0 = -1375 - 370 \cdot 0{,}5 = -1560$	370	0,78	-288,6

Secţiune	$tg\phi_i$	ϕ_i	$\sin\phi_i$	$\cos\phi_i$	x
8	0	0	0	1	8
H	0,0781	4,465	0,0778	0,996	7,5
G	0,2343	13,186	0,228	0,973	6,5
F	0,3906	21,335	0,363	0,931	5,5
E	0,5468	28,66	0,479	0,877	4,5
D	0,7031	35,11	0,575	0,818	3,5
C	0,8593	40,67	0,651	0,758	2,5
B	1,0156	45,44	0,712	0,701	1,5
A	1,1718	49,52	0,76	0,649	0,5
0	1,25	51,34	0,78	0,624	0

Secţiunea	W	y	yW	M_P^0	M_p^0W	yM_p^0W
A	1,6	-2,185	-3,496	-1375	-2200	4807
B	1,464	-1,09	-1,595	-1005	-1471	1603,3
C	1,345	-0,16	-0,215	-735	-988,5	158,16
D	1,226	0,627	0,768	-465	-570	-357,3
E	1,136	1,252	1,422	-295	-335,1	-419,54
F	1,07	1,721	1,841	-125	-133,75	-230,1
G	1,02	2,034	2,074	-75	-76,5	-155,29
H	1,003	2,19	2,196	-25	-25,07	-54,9

$\sum M_p{}^0 W = -5799{,}9\,;\ \sum yM_p{}^0 W = 5351{,}3$

$$X_1 = \frac{\sum yM_p{}^0 W}{\sum y^2 W + li_o{}^2}\,;\ X_2 = -\frac{\sum M_p{}^0 W}{\sum W}$$

$\sum W = 9{,}86$

$\sum y^2 W = 23{,}87$

$\frac{1}{2} li_0{}^2 = \frac{1}{2} 16 \frac{0{,}6^2}{12} = 0{,}24$ (termenul ½ apare datirită faptului că se lucrează pe semistructură)

$$X_1 = \frac{5351{,}3}{23{,}87 + 0{,}24} = 221{,}95$$

$$X_2 = -\frac{-5799{,}9}{9{,}864} = 587{,}98KN$$

$M_p = M_p{}^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 = M_p{}^0 - yX_1 + X_2$

$N_p = N_p{}^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 = N_p{}^0 - X_1 \cos\phi$

Secţiunea	Y	$-yX_1$	$M_p{}^0$	M_p	$N_p{}^0$	$\cos\phi_i$	$-X_1\cos\phi_i$	N_p
8	2,21	-490,5	0	94,78	0	1	-221,95	-221,95
H	2,19	-486,07	-25	76,91	-3,89	0,996	-221,06	-224,95

G	2,03	-450,5	-75	62,48	-11,4	0,973	-215,95	-227,35
F	1,721	-381,9	-125	81,08	-18,15	0,931	-206,63	-224,78
					-61,71			-268,3
E	1,252	-277,8	-295	15,18	-81,43	0,877	-194,65	-276,08
D	0,627	-139,16	-465	-16,18	-97,75	0,818	-181,5	-279,2
					-155,2			-336,7
C	-0,16	35,51	-735	-111,5	-175,7	0,758	-168,23	-343,9
B	-1,09	241,9	-1005	-175,1	-192,2	0,701	-155,5	-347,7
					-263,4			-418,9
A	-2,185	484,9	-1375	-302,1	-281,2	0,649	-144,04	-425,2
0	-2,79	619,2	-1560	-352,8	-288,6	0,624	-138,49	-427,09

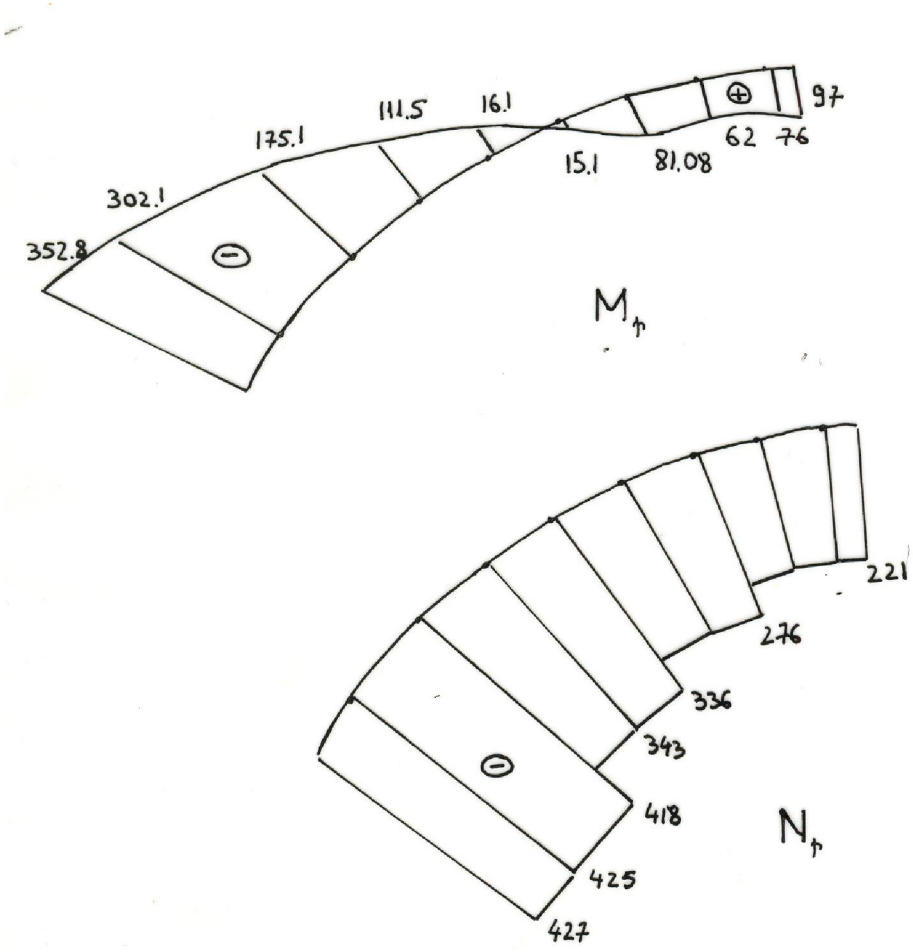


Fig.2.11 Diagrame de eforturi pe semistructură la arcul dublu încastrat a)diagramă de moment încovoietor b)diagramă de efort axial

2.2 Grinzi cu zăbrele static nedeterminate

La grinzile cu zăbrele static nedeterminate se menţin ipotezele simplificatoare de la grinzile static determinate:
-barele au axa dreaptă şi sînt centrate în noduri
-la noduri se consideră articulaţii perfecte
-forţele se aplică numai la nodurile structurii

Considerînd aceste ipoteze simplificatoare în bare se vor dezvolta numai eforturi axiale.
Nedeterminarea statică poate provenii din legături suplimentare exterioare, interioare sau combinate. Gradul de nedeterminare statică se obţine cu relaţia: $N = (b + r) - 2n$
În care: b reprezintă numărul de bare; r este numărul total de legături simple; n este numărul de noduri.
Metoda de calcul folosită este metoda eforturilor. Sistemul de bază se obţine prin suprimarea legăturilor suplimentare. La formarea sistemului de bază se va ţine cont de posibilităţile de simplificare a calculelor: simetria, necunoscutele unitare să producă eforturi într-un număr cît mai mic de bare.

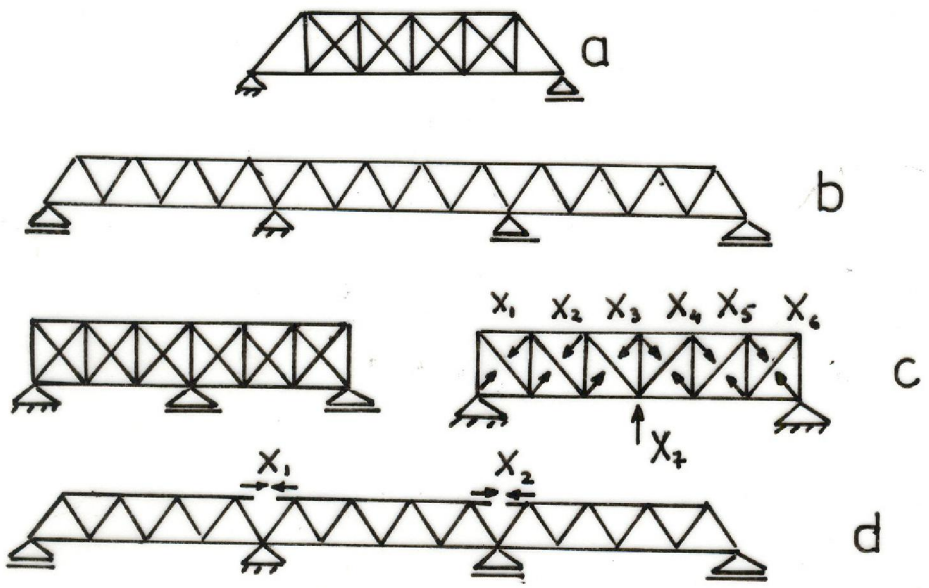


Fig.2.12 Exemple de grinzi cu zăbrele static nedeterminate: a. N=4;b.N=2
c,d: sisteme de bază

Ecuaţia de condiţie i are forma:

$$(2.36)\,\mathrm{K}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}X_j + \Delta_{ip} = 0$$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi au expresiile:

$$(2.37)\,\mathrm{K}\;EA_0\delta_{ij} = \sum\frac{A_0}{A}n_i n_j l; \quad EA_0\delta_{ii} = \sum\frac{A_0}{A}n_i{}^2 l$$

Termenul liber din ecuaţia de condiţie are forma:

$$(2.38)\,\mathrm{K}\;EA_0\Delta_{ip} = \sum\frac{A_0}{A}N_p{}^0 n_i l$$

A_0 este aria secţiunii unei bare luate ca reper, n_i sînt eforturile în barele sistemului de bază din X_i=1, $N_p{}^o$ reprezintă eforturile axiale din barele sistemului de bază încărcat cu forţele exterioare, produsul EA reprezintă rigiditatea axială a barei.

În final efortul într-o bară oarecare se obţine prin suprapunere de efecte cu relaţia:

$$(2.39)\,\mathrm{K}\;N_p = N_p{}^0 + \sum_{i=1}^{n} n_i X_i$$

Exemplul2.4 : Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate din figura 2.13

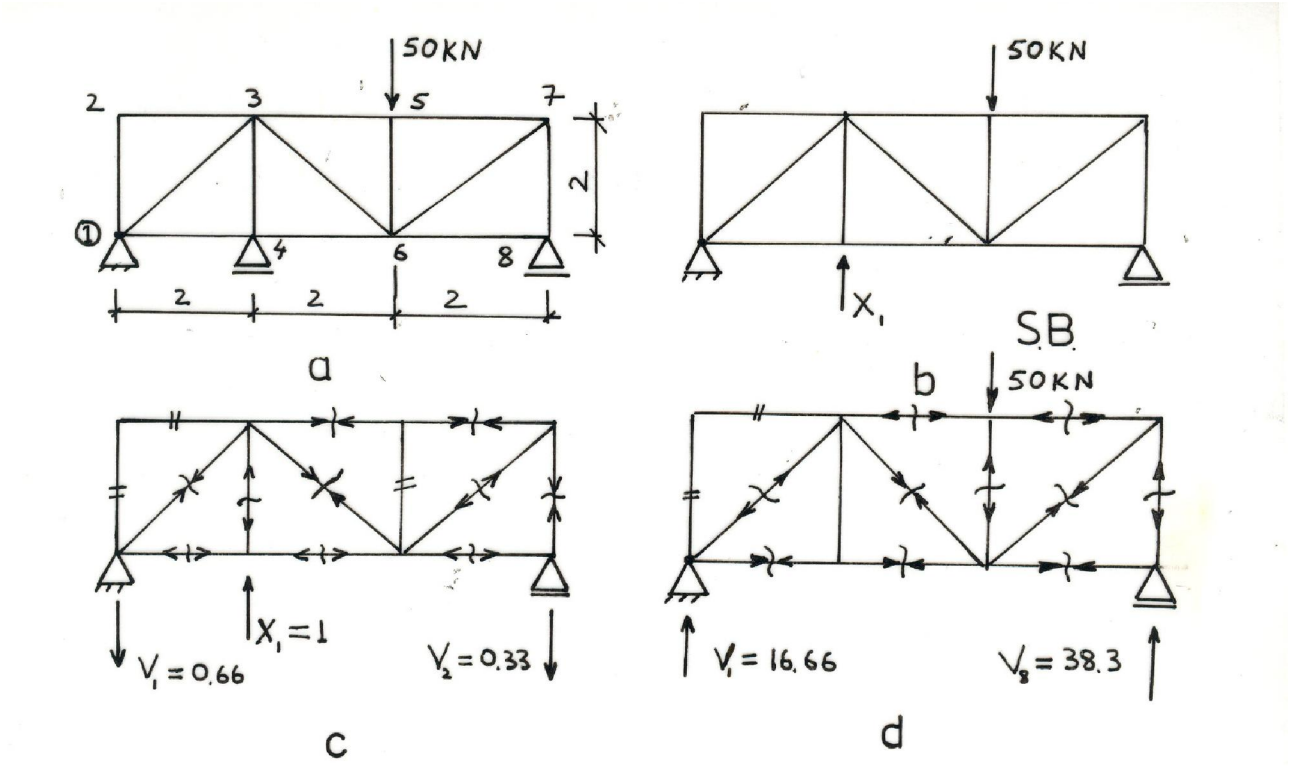


Fig.2.13 a.grindă cu zăbrele static nedeterminată;b.sistem de bază;c. sistem de bază încărcat cu necunoscuta X_1=1; d.sistem de bază încărcat cu forţa de 50KN

a) Pentru sistemul de bază încărcat cu necunoscuta X_1=1 se rezolvă grinda cu zăbrele folosind metoda izolării nodurilor.

Calculul reacţiunilor:

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -1 \cdot 2 + V_2 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

$$\left(\sum M\right)_8 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_1 = 0{,}666$$

Nod1:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow N_{13} \sin\alpha - 0{,}666 = 0 \rightarrow N_{13} = \frac{0{,}666}{0{,}707} = 0{,}942$$

$$\sum X_i = 0 \rightarrow 0{,}942 \cdot 0{,}707 - N_{14} = 0 \rightarrow N_{14} = 0{,}666$$

Nod 4:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow N_{34} = 1; \sum X_i = 0 \rightarrow N_{46} = 0{,}666$$

Nod 3:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow 1 - 0{,}942 \cdot 0{,}707 - N_{36} \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{36} = 0{,}47$$

$$\sum X_i = 0 \rightarrow -0{,}942 \cdot 0{,}707 + N_{35} + 0{,}47 \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{35} = 0{,}33$$

Nod5:

$\sum X_i = 0 \rightarrow N_{57} = 0{,}33$

Nod 6:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 0{,}47 \cdot 0{,}707 - N_{67} \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{67} = 0{,}47$

$\sum X_i = 0 \rightarrow 0{,}66 - 0{,}47 \cdot 0{,}707 - N_{68} - 0{,}47 \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{68} = 0$

Nod 7:

$N_{78} = 0{,}33 = V_2$

b) Sistemul de bază încărcat cu forţa exterioară.

Calculul reacţiunilor:

$$\sum M_8 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 50 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{100}{6} = 16{,}66KN$$

$\sum M_1 = 0 \rightarrow 50 \cdot 4 - V_8 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_8 = 33{,}33KN$

Nod 1:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 16{,}66 - N_{13} \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{13} = 23{,}56$

$\sum X_i = 0 \rightarrow N_{14} - 23{,}56 \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{14} = 16{,}66$

Nod 4:

$N_{46} = N_{14} = 16{,}66$

Nod 3:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 23{,}56 \cdot 0{,}707 - N_{36} \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{36} = 23{,}56$

$\sum X_i = 0 \rightarrow 23{,}56 \cdot 0{,}707 + 23{,}56 \cdot 0{,}707 - N_{35} = 0 \rightarrow N_{35} = 33{,}31$

Nod 5:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow N_{56} = 50$

$\sum X_i = 0 \rightarrow N_{57} = 33{,}31$

Nod 6:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow -50 + 23{,}56 \cdot 0{,}707 + N_{67} \cdot 0{,}707 = 0 \rightarrow N_{67} = 47{,}16$

$\sum X_i = 0 \rightarrow -16{,}66 - 23{,}56 \cdot 0{,}707 + 47{,}16 \cdot 0{,}707 + N_{68} = 0 \rightarrow N_{68} = 0$

Nod 7:

$N_{78} = 38{,}33$

Rezultatele obţinute se centralizează în tabelul 2.1

Tabelul 2.1

Bara	Aria	l	n_1	N_p^0	$\frac{n_1^2 l}{EA}$	$\frac{n_1 N_p^0 l}{EA}$	Np
1-2	A	2	0	0	0	0	0
1-3	A	2,82	0,942	-23,56	2,5/EA	-62,58/EA	0,47
1-4	A	2	-0,666	16,66	0,88/EA	-22,19/EA	-0,33
2-3	A	2	0	0	0	0	0
3-4	A	2	-1	0	2/EA	0	-25,52
3-6	A	2,82	0,47	23,56	0,62/EA	31,22/EA	35,55
3-5	A	2	0,33	-33,31	0,21/EA	-21,98/EA	-24,88
4-6	A	2	-0,666	16,66	0,88/EA	-22,19/EA	-0,336
5-6	A	2	0	-50	0	0	-50
5-7	A	2	0,33	-33,31	0,21/EA	-21,98/EA	-24,88

6-7	A	2,82	-0,47	47,16	0,62/EA	-62,5/EA	35,16
6-8	A	2	0	0	0	0	0
7-8	A	2	0,33	-38,33	0,21/EA	-25,29	-29,9

$$\sum \frac{n_1^{\,2} l}{EA} = \frac{8{,}13}{EA};\ \sum \frac{n_1 N_p^{\,0} l}{EA} = -\frac{207{,}49}{EA}$$

Ecuaţia de condiţie are forma : $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = 25{,}52$

Valorile eforturilor axiale din barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate sînt prezentate în tabelul 2.1.

Exemplul 2.5 Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate din figura 2.14.

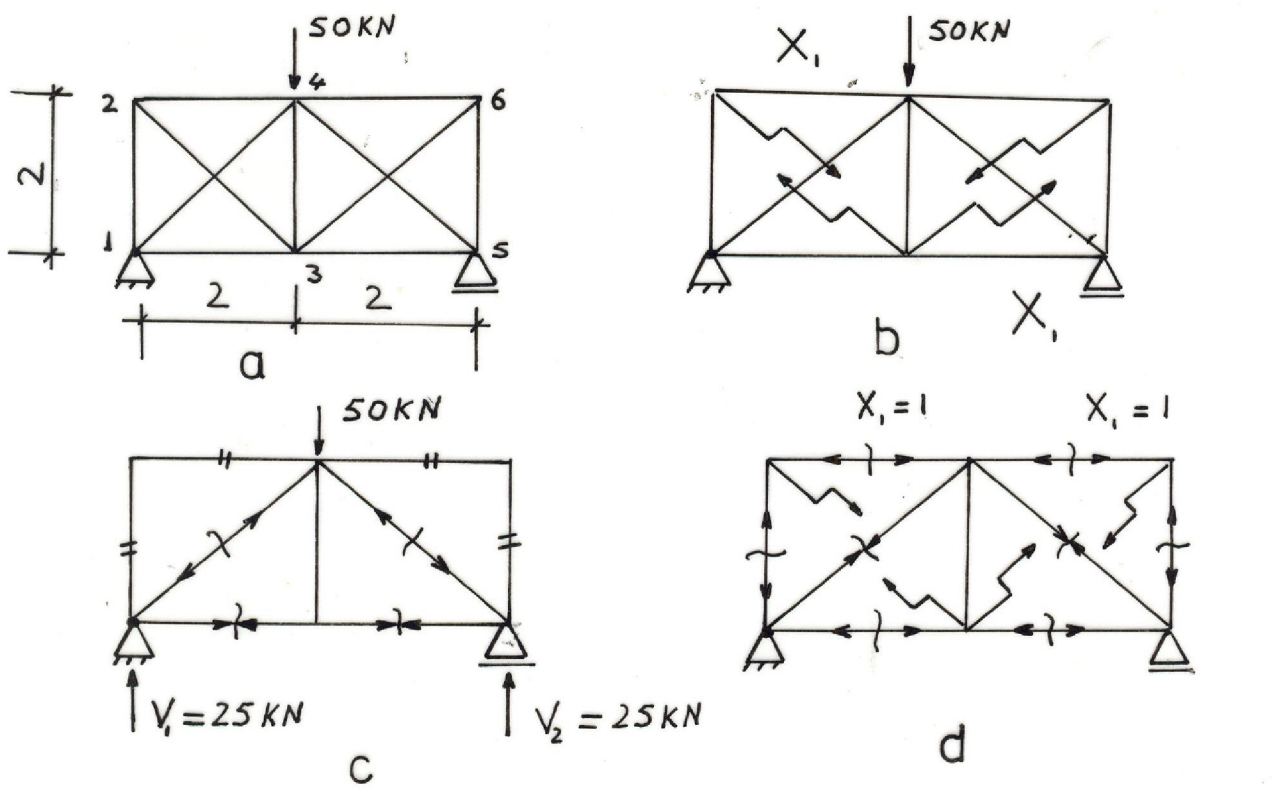


Figura 2.14 a)Grindă cu zăbrele static nedeterminată (nedeterminare interioară); b)sistem de bază; c)sistem de bază încărcat cu forţa de 50KN; d)sistem de bază încărcat cu necunoscuta X_1=1

a) Pentru sistemul de bază încărcat cu necunoscuta X_1=1 se rezolvă grinda cu zăbrele folosind metoda izolării nodurilor.

Nod 2:

$\sum X_i = 0 \rightarrow -N_{24} + 1 \cdot 0{,}707 = 0\ ;\ N_{24} = 0{,}707$

$\sum Y_i = 0 \rightarrow N_{12} = 0{,}707$

Nod 1:

$-0,707+N_{14}\cdot 0,707=0\,;\ N_{14}=1$

$\sum X_i=0\rightarrow 1\cdot 0,707-N_{13}=0\,;\ N_{13}=0,707$

Nodul 4:

$\sum Y_i=0\rightarrow N_{34}-2\cdot 1\cdot 0,707=0\,;\ N_{34}=1,41$

b) Sistemul de bază încărcat cu forţa exterioară:

$\sum Y_i=0\rightarrow 25-N_{14}\cdot 0,707=0$

$N_{14}=\dfrac{25}{0,707}=35,36KN$

$\sum X_i=0\rightarrow N_{13}-35,36\cdot 0,707=0$

$N_{13}=25KN$

Bara	Aria	l	n_1	Np^0	$\frac{n_1^2 l}{EA}$	$\frac{n_1\cdot N_p^{\ 0}\cdot l}{EA}$	N_p
1-2	A	2	-0,707	0	$\frac{1}{EA}$	0	-7,79
1-3	A	2	-0,707	25	$\frac{1}{EA}$	$-\frac{17,67}{EA}$	17,2
1-4	A	2,82	1	-35,36	$\frac{2,82}{EA}$	$-\frac{99,71}{EA}$	-24,33
2-3	A	2,82	1	0	$\frac{2,82}{EA}$	0	11,03
2-4	A	2	-0,707	0	$\frac{1}{EA}$	0	-7,79
3-4	A	2	-1,41	0	$\frac{4}{EA}$	0	-15,55
3-5	A	2	-0,707	25	$\frac{1}{EA}$	$-\frac{17,67}{EA}$	17,2
3-6	A	2,82	1	0	$\frac{2,82}{EA}$	0	11,03
4-5	A	2,82	1	-35,36	$\frac{2,82}{EA}$	$-\frac{99,71}{EA}$	-24,3
4-6	A	2	-0,707	0	$\frac{1}{EA}$	0	-7,79
5-6	A	2	-0,707	0	$\frac{1}{EA}$	0	-7,79

$\sum\frac{n_1^{\ 2}l}{EA}=\frac{21,28}{EA}\,;\ \sum\frac{n_1N_p^{\ 0}l}{EA}=-\frac{234,7}{EA}$

$\delta_{11}X_1+\Delta_{1p}=0\rightarrow X_1=\dfrac{234,7}{21,28}=11,03$

CAP. 3 METODA DEPLASARILOR

3.1 Introducere

Metoda se pretează la rezolvarea structurilor static nedeterminate cu noduri rigide (de exemplu cadre) şi porneşte de constatarea că poziţia deformată a unei astfel de structuri poate fi complet definită dacă se cunosc deplasările nodurilor (rotiri şi translaţii).Astfel, aceste deplasări sînt alese drept necunoscute ale problemei. După aflarea lor, se pot determina prin relaţii simple momentele încovoietoare care se dezvoltă în secţiunile de la capetele barelor şi astfel pot fi trasate diagramele de eforturi.

Alegerea deplasărilor nodurilor ca necunoscute corespunde considerării situaţiei de nedeterminare geometrică; gradul de nedeterminare este reprezentat de numărul deplasărilor distincte ale nodurilor. Pot fi deosebite două tipuri de deplasări: rotirile de noduri şi translaţiilor pe direcţiile gradelor de libertate elastică a structurii.

Prin folosirea acestor necunoscute, condiţia de continuitate a deformatei structurii este satisfăcută pentru orice valori arbitrare ale necunoscutelor. Valorile reale ale necunoscutelor se determină din condiţia de echilibru static, care trebuie satisfăcută simultan cu condiţia de continuitate.

Metoda deplasărilor se utilizează pe o scară mai largă la calculul structurilor, în comparaţie cu metoda eforturilor. Unul din considerente îl reprezintă faptul că această metodă este pe deplin adaptabilă pe calculator în cazul formulării matriceale. Un alt considerent îl reprezintă faptul că sistemul de bază este format din bare tip, a căror diagramă de momente funcţie de încărcare este precalculată.

Caracterizarea structurilor din punct de vedere geometric se referă la stabilirea numărului de parametri independenţi care definesc poziţia deformată sub acţiunea încărcărilor. Structurile alcătuite din bare solicitate predominant la încovoiere şi legate între ele în noduri rigide sînt denumite cadre. Datorită rigidităţii nodurilor, unghiurile dintre tangentele la axele barelor în nod se păstrează şi după deformare, toate capetele de bare într-un nod avînd aceleaşi deplasări ca şi nodul.

Poziţia deformată a unui cadru va fi deci precizată prin deplasările nodurilor care pot fi de două tipuri: rotiri şi translaţii. Pentru definirea poziţiei deformate a cadrului din figura 3.1 sînt necesare rotirile celor două noduri (θ_1, θ_2)şi translaţiile nodurilor (u_1,u_2).

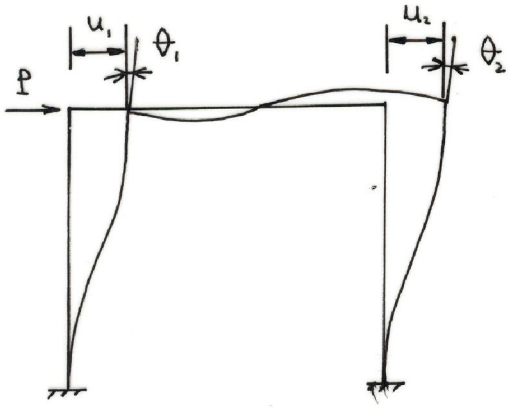


Fig.3.1 Structură în forma iniţială şi forma deformată

3.2 Tipuri de structuri în metoda deplasărilor. Structură auxiliară

Ipoteza simplificatoare adoptată în formularea clasică a metodei deplasărilor o reprezintă faptul că barele nu se deformează axial,dar în formularea matriceală se renunţă la această ipoteză.

Astfel în formularea clasică a metodei deplasărilor nodurile vor suferi doar două tipuri de deplasări posibile: translaţii şi rotaţii. Structurile ale căror noduri pot avea ca deplasări nodale doar rotaţii de noduri poartă numele de structuri cu noduri fixe (fig.3.2a) iar cele ale căror noduri pot avea ca deplasări atît rotaţii cît şi translaţii de noduri poartă numele de structuri cu noduri deplasabile (fig.3.2b).

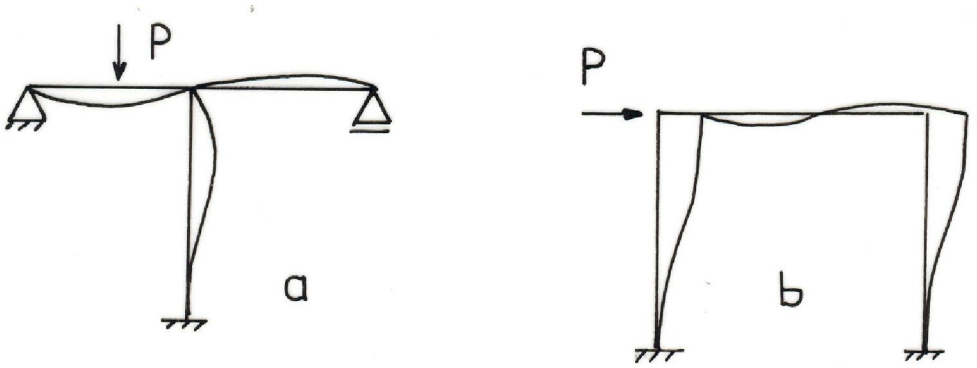


Fig.3.2 Forme deformate pentru structuri cu noduri fixe şi structuri cu noduri deplasabile

Identificarea unei structuri (structură cu noduri fixe s-au structură cu noduri deplasabile) se face parcurgînd următoarele etape:

-în toate nodurile rigide ale structuri şi în încastrările cu baza de rezemare se introduc articulaţii, obţinîndu-se astfel numai bare dublu articulate sau articulate şi simplu rezemate la celălalt capăt (fig.3.3b,d). Se obţine astfel structura auxiliară.

-structura auxiliară se analizează din punct de vedere cinematic,

-dacă structura auxiliară nu are nici un grad de libertate cinematică (fig.3.3b) atunci structura iniţială este o structură cu noduri fixe.

-dacă structura auxiliară este un mecanism(fig.3.3d) atunci structura iniţială este o structură cu noduri deplasabile. În această situaţie numărul gradelor de libertate cinematică este egal cu numărul gradelor de libertate elastică ale structurii reale.

Numărul gradelor de libertate cinematică ale structurii auxiliare plane se determină cu relaţia:

$$(3.1)\ \mathrm{K}\, W = 3B - 2A - S$$

unde B reprezintă numărul de bare, A numărul de articulaţii simple iar S numărul de reazeme simple.

Dacă W≤0 structura reală este cu noduri fixe, iar dacă W>0 structura reală este cu noduri deplasabile.

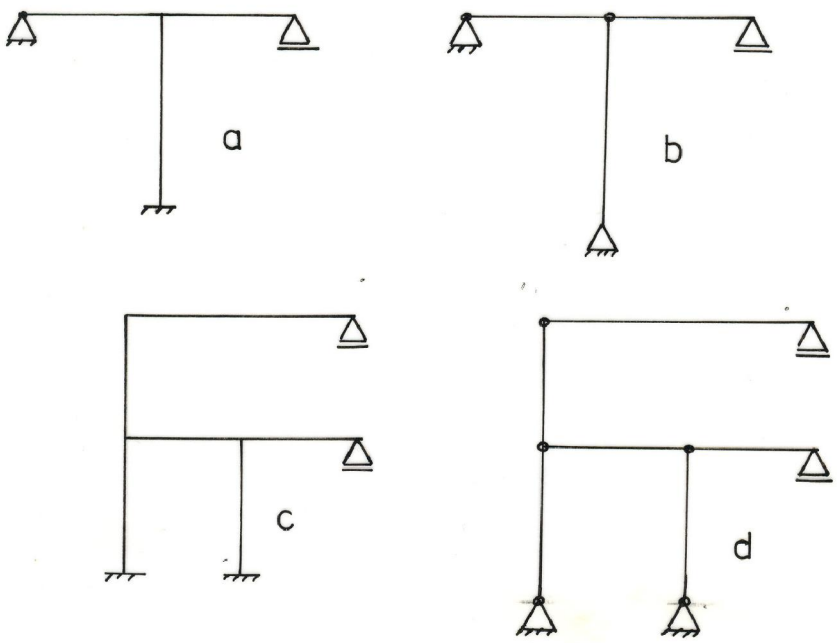


Fig.3.3 Structura primară (a,c); structura auxiliară(b,d)

De exemplu structura auxiliară din figura 3.3b este formată din trei bare, şi are patru articulaţii simple. Rezultă:

$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 1 = 0$

deci concluzia că structura auxiliară este invariabilă geometric iar structura reală (fig.3.3a) este o structură cu noduri fixe.

Structura auxiliară din figura 3.3d este formată din şase bare, şi are şapte articulaţii simple şi două reazeme simple, deci:

$W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 2 = 2$

Rezultă că structura auxiliară are două grade de libertate cinematică iar structura reală (fig.3.3c) este o structură cu noduri deplasabile avînd două grade de libertate elastică (posibilitatea de translatare pe orizontală a nodurilor).

3.3 Sistem de bază. Ecuaţii de condiţie.

Pentru determinarea deformatei unei structuri şi, pe baza ei, a diagramelor de eforturi, este necesară cunoaşterea deplasărilor nodurilor care devin astfel necunoscutele problemei. În metoda deplasărilor, necunoscutele sînt deci deplasările distincte ale nodurilor:

-necunoscute rotiri de noduri , egale ca număr cu numărul nodurilor rigide;

-necunoscute grade de libertate elastice ale structurii, care caracterizează translaţiile nodurilor, egale ca număr cu numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar articulat.

Sistemul de bază în metoda deplasărilor, se obţine prin adăugarea de legături simple care să blocheze deplasările distincte ale nodurilor, şi anume:

-încastrări suplimentare care să blocheze rotirile nodurilor rigide şi în care apar numai reacţiuni-momente;

-legături de grad de libertate care să blocheze gradele de libertate elastică ale structurii inţiale; aceste legături trebuie astfel aşezate încît să blocheze toate translaţiile nodurilor.

Legătura care se introduce într-un nod rigid se numeşte blocaj de nod. O asemenea legătură împiedică rotirea nodului dar lasă liberă posibilitatea de translatare. Echivalentul mecanic al blocajului de nod este o reacţiune moment.

Legătura ce se introduce pe direcţia unui grad de libertate se numeşte legătură de grad de libertate.

O asemenea legătură împiedică translaţia nodurilor de pe direcţia gradului de libertate dar lasă liberă rotirea acestora. Echivalentul mecanic al unei legături de grad de libertate este o reacţiune forţă.

În cazul structurilor cu noduri fixe sistemul de bază se obţine prin introducerea de blocaje de nod.

În figura 3.4b este prezentat sistemul de bază al structurii cu noduri fixe din fig.3.4a. Numărul total de necunoscute va fi egal cu numărul de noduri rigide (o necunoscută).

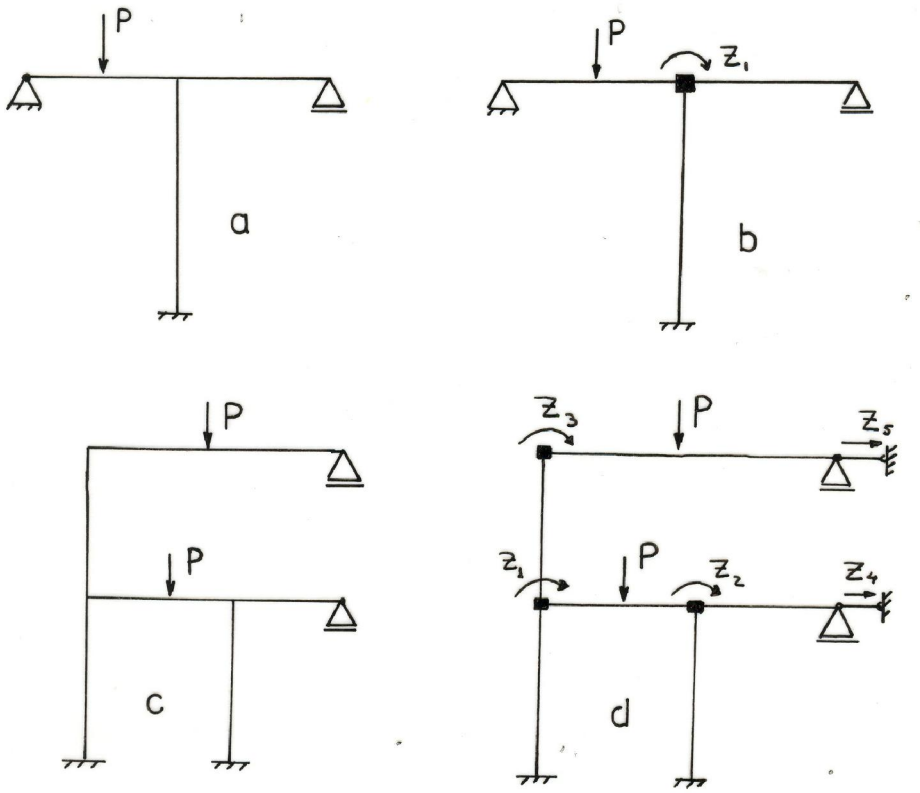


Fig.3.4 Sisteme de bază pentru structuri cu noduri fixe şi cu noduri deplasabile

Sistemul de bază pentru structurile cu noduri deplasabile se obţine prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide ale structurii şi prin introducerea de legături de grad de libertate pe direcţia gradelor de libertate elastică.

În fig. 3.4d este prezentat sistemul de bază al structurii cu noduri deplasabile din fig. 3.4c. Numărul total de necunoscute va fi, în acest caz egal cu numărul nodurilor rigide plus numărul gradelor de libertate. Sistemul de bază astfel obţinut are următoarele proprietăţi, din care rezultă, simplitatea utilizării metodei deplasărilor:

-este unic şi se obţine prin blocarea deplasărilor posibile ale nodurilor.

-este multiplu static nedeterminat, deoarece au fost introduse o serie de legături simple.

-este format din două tipuri de bare, bare dublu încastrate şi bare încastrate la un capăt şi articulate la celălalt.

Sistemul de bază în metoda deplasărilor se încarcă atît cu forţele exterioare cît şi cu deplasările posibile ale nodurilor (rotaţii şi translaţii).

Pentru rezolvarea structurii este necesară cunoaşterea eforturilor produse de forţele exterioare şi deplasările nodurilor asupra barelor tip din sistemul de bază. Ţinînd cont de faptul că se lucrează doar cu două tipuri de bare (dublu încastrate sau încastrate –articulate), eforturile

produse de aceste încărcări: forţe sau deplasări, pot fi precalculate şi întabulate. De aici rezultă simplitatea rezolvării prin metoda deplasărilor.

Din încărcarea sistemului de bază cu forţele exterioare şi cu deplasările nodurilor, în legăturile suplimentare vor apare reacţiuni. Aceste legături nu există în realitate pe structura iniţială, deci condiţia de la care se pleacă este ca reacţiunea totală din legătura suplimentară -i- să fie egală cu zero.

Aceasta se obţine prin suprapunere de efecte şi are expresia:

(3.2) K $R_i = r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + ... + r_{in}Z_n + R_{ip}$

unde:

-$Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ reprezintă deplasările necunoscute ale nodurilor structurii reale.

-r_{ij} reprezintă reacţiunea în legătura suplimentară -i- cînd sistemul de bază este încărcat numai cu deplasarea $Z_j=1$

R_{ip} reprezintă reacţiunea din legătura suplimentară -i- cînd sistemul de bază este încărcat numai cu forţele exterioare date.

Condiţia care se impune este ca sistemul de bază încărcat cu forţele exterioare şi cu deplasările nodurilor să se comporte identic cu structura reală. Aceasta este echivalentă cu condiţia ca reacţiunile totale din legăturile suplimentare să fie egale cu zero, deoarece aceste legături sînt fictive, ele nu există în realitate. Deci $R_1=0, R_2=0, \ldots R_n=0$. Dezvoltat aceste condiţii capătă forma:

$$
\begin{aligned}
&r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ... + r_{1i}Z_i + ... + r_{1n}z_n + R_{1p} = 0 \\
&r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ... + r_{2i}Z_i + ... + r_{2n}z_n + R_{2p} = 0 \\
&... \\
&r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ... + r_{ni}Z_i + ... + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Ecuaţiile (3.3) reprezintă sistemul ecuaţiilor de condiţie din metoda deplasărilor, numărul necunoscutelor fiind egal cu numărul legăturilor suplimentare.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie al metodei deplasărilor reprezintă condiţia de echilibru static al structurii reale. O ecuaţie din sistem, de exemplu ecuaţia –i-, reprezintă condiţia ca reacţiunea totală din legătura suplimentară –i- să fie egală cu zero, respectiv condiţia de echilibru static al structurii reale pe direcţia necunoscutei Z_i.

Eforturile finale, în orice secţiune, se obţin printr-o suprapunere de efecte:

$$M_p = M_p{}^0 + m_1Z_1 + m_2Z_2 + m_nZ_n$$

unde:

-$M_p{}^0$ reprezintă momentul încovoietor produs de forţele exterioare pe sistemul de bază în secţiunea considerată.

-m_i reprezintă momentul încovoietor produs prin încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $Z_i=1$, în aceeaşi secţiune.

Verificarea calculului prin metoda deplasărilor este verificarea condiţiei de echilibru static al structurii .

3.4 Convenţie de semne

Deoarece în această metodă necunoscutele sînt rotiri de noduri şi rotiri de bare (translaţii de noduri), este necesară o convenţie de semne care să fie aceeaşi pentru rotiri şi momente la capetele barelor. Se precizează faptul că această convenţie de semne este diferită faţă de cea din metoda eforturilor.

Specificul metodei deplasărilor arată că este avantajos să se adopte, pentru rotiri şi pentru momentele de capăt, convenţii de semne care să concorde între ele. În această convenţie se consideră pozitive atît rotirile cît şi momentele care au sens orar.

Privitor la rotiri, oricare ar fi rotirea considerată- rotirea unui nod, a unei extremităţi de bară sau a axei unei bare- aceasta se admite pozitivă cînd se produce în sens orar şi negativă cînd se produce în sens antiorar.

În fig. 3.5a şi b este prezentat sensul pozitiv al rotirilor nodurilor unei bare dublu încastrate. Se observă că rotirea θ_i a nodului i are loc în sensul acelor de ceasornic. În cazul translaţiei de nod, aceasta se consideră pozitivă dacă linia reazemelor se roteşte în sensul acelor de ceasornic (rotirea $\Psi_{ij} = \frac{\Delta}{l}$ este pozitivă).

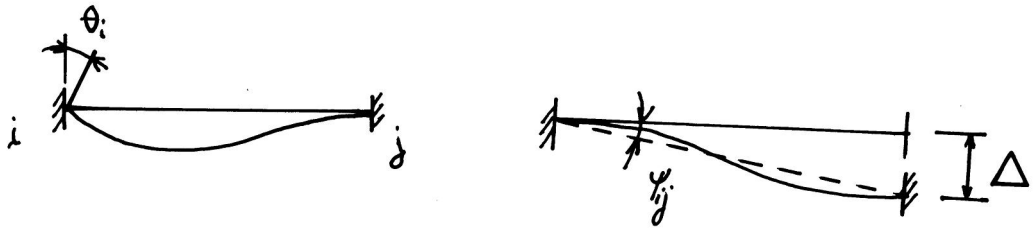


Fig.3.5 Bara dublu încastrată încărcată cu rotaţie de nod

În figura 3.6 se prezintă convenţia de semne pentru o bară dublu încastrată încărcată cu o forţă uniform distribuită. Se izolează nodurile şi bara şi se prezintă momentele pe nod şi pe bară.

Astfel în nodul din stînga momentul pe nod este pozitiv iar cel de pe bară este negativ. În nodul din dreapta momentul pe bară este pozitiv (în sens orar) iar cel de pe nod este negativ.

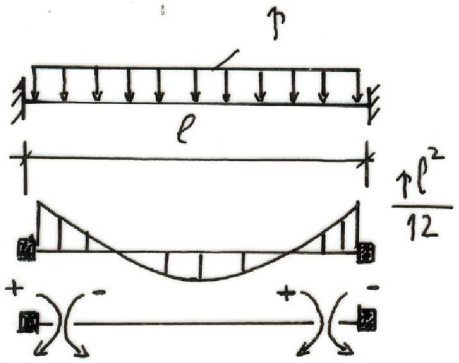


Fig.3.6 Convenţie de semne pentru momente

3.5 Legătura dintre eforturi şi deplasări pentru barele tip din sistemul de bază

Încărcarea barelor tip cu deplasări de noduri poate fi evaluată prin mai multe metode. Soluţia aleasă în cazul de faţă o reprezintă folosirea ecuaţiei celor trei momente. Rezultatele obţinute se centralizează în figura 3.28.

Pentru cel de-al doilea tip de încărcare şi anume încărcarea cu forţe, rezolvarea acestor bare tip nu face obiectul capitolului de faţă. Rezolvarea acestor bare tip, încărcate cu forţe, se face utilizînd ecuaţia celor trei momente. Tabelul centralizator este prezentat în capitolul 1.

a) Bara dublu încastrată încărcată cu rotiri de nod

Soluţia adoptată în acest capitol o reprezintă folosirea ecuaţiei celor trei momente în calculul momentelor de încastrare perfectă pentru barele tip din sistemul de bază.

Încărcărcările de tipul rotirilor de nod sau rotiri de bară pot fi considerate ca fiind cedări de reazeme.

Ecuaţia celor trei momente în cazul încărcării grinzii cu cedări de reazeme are forma:

(3.4) $\mathrm{K}\ \lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6EI_0 \Delta_{jr}$

unde:

(3.5) $\mathrm{K}\ \Delta_{jr} = -\sum r_j \Delta_r$

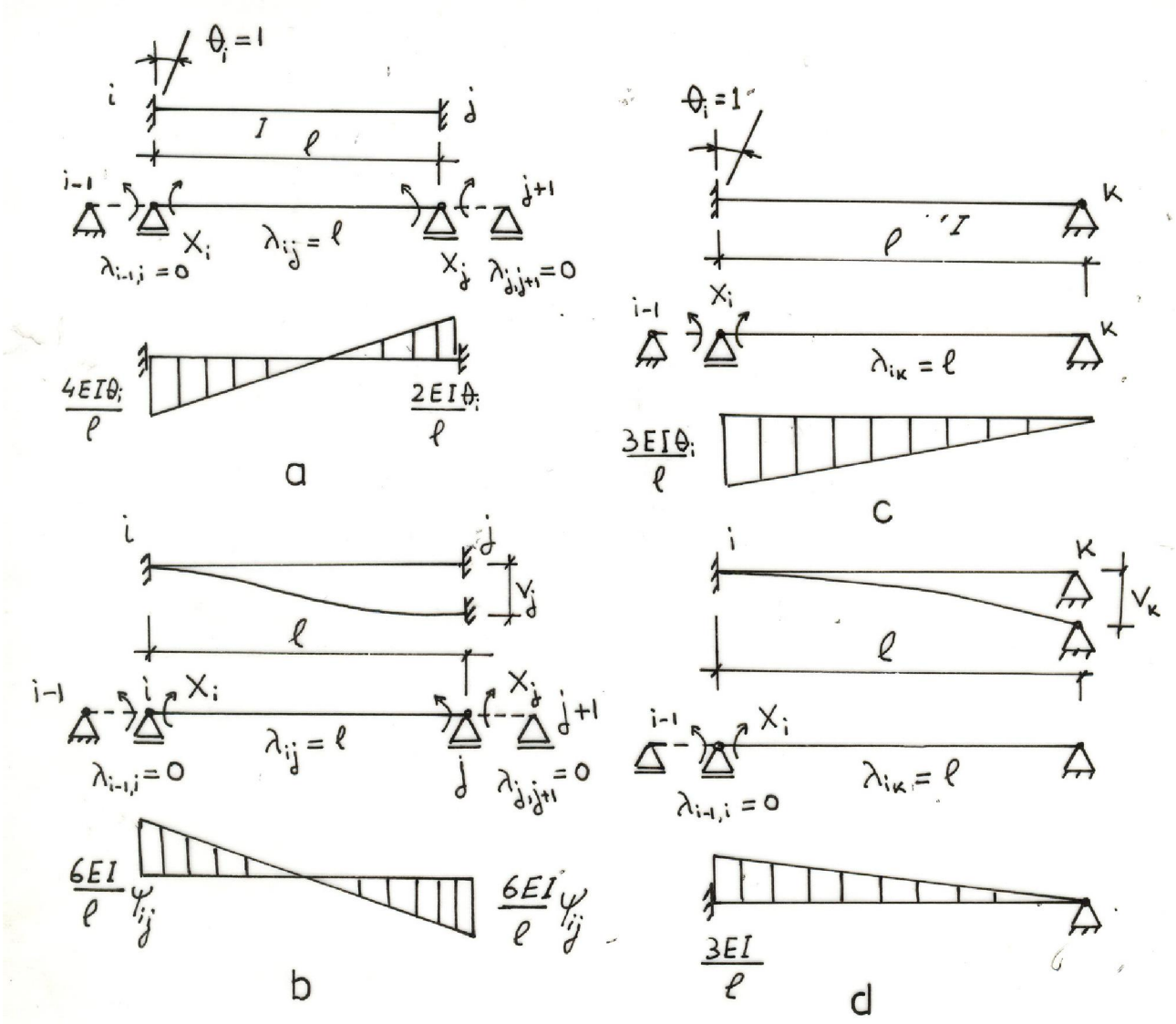


Fig.3.7 Bare tip din sistemul de bază încărcate cu rotaţii de nod sau rotiri de bară

Bara dublu încastrată încărcată cu rotire de nod este prezentată în figura 3.7a.

Scriindu-se ecuaţia (3.4) în nodul 1 şi 2 se obţine sistemul de ecuaţii următor:

$$\begin{aligned} 2lX_i + lX_j &= 6EI\theta_i \\ lX_i + 2lX_j &= 0 \end{aligned} \rightarrow 3lX_j = 6EI\theta_i \rightarrow X_j = -\frac{2EI\theta_i}{l}$$

$$X_i = \frac{4EI\theta_i}{l}$$

Dacă se consideră $i_{ij} = \frac{EI}{l}$ şi $v_i = 1$ se obţin expresiile pentru momentele pe bară în nodurile i şi j:

$M_{ij} = 4i_{ij}$ şi $M_{ji} = 2i_{ij}$

b) Bara încastrată articulată încărcată cu rotaţie de nod

Sistemul de bază în acest caz este prezentat în figura 3.7b. Existînd o singură necunoscută ecuaţia celor trei momente se va scrie într-o singură secţiune:

$$2lX_i = 6EI\theta_i$$

$$X_i = \frac{3EI\theta_i}{l}$$

Dacă se consideră $i_{ik} = \frac{EI}{l}$ şi $\theta_i = 1$ se obţine momentul pe bară în secţiunea i: $M_{ik} = 3i_{ik}$

c) Bara dublu încastrată încărcată cu translaţie de nod

Sistemul de bază este prezentat în figura 3.7c. În cazul de faţă există două necunoscute egale ca valoare dar cu semne contrare.

Forma generală a ecuaţiei celor trei momente este:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -6EI_0\left(\frac{v_j - v_i}{l_{ij}} + \frac{v_j - v_k}{l_{jk}}\right)$$

Se va scrie doar ecuaţia în secţiunea i apoi se va pune codiţia de egalitate şi de semn contrar a necunoscutelor.

$$2lX_i + lX_j = -6EI\left(-\frac{v_j}{l}\right) = \frac{6EIv_j}{l}$$

$$X_j = -X_i$$

$$lX_i = \frac{6EI}{l}v_j \rightarrow X_i = \frac{6EI}{l^2}$$

Dacă notăm rotirea barei ij cu $\psi_{ij} = \frac{1}{l}$ şi $\frac{EI}{l} = i_{ij}$ atunci expresia momentului de încastrare perfecă este: $M_{ij} = -M_{ji} = 6i_{ij}\psi_{ij}$

d) Bara încastrată articulată încărcată cu translaţie de nod

Sistemul de bază în acest caz are o singură necunoscută fiind prezentat în fig. 3.7d.

Ecuaţia scrisă în secţiunea i are forma:

$$2lX_i = -6EI\left(-\frac{v_k}{l}\right)$$

$$lX_i = \frac{3EIv_j}{l} \rightarrow X_i = 3i_{ik}\psi_{ik}$$

De asemenea, se constată că momentele încovoietoare produse de încărcarea cu rotiri de nod sau rotiri de bară, comparativ cu cele produse de forţe, depind atît de încărcare cît şi de natura materialului şi de valoarea absolută a momentului de inerţie (prin produsul EI).

3.6 Valorile momentelor încovoietoare pentru barele tip

Expresiile generale ale acestor eforturi pentru barele tip ale sistemului de bază, atît pentru structuri cu noduri fixe cît şi pentru structuri cu noduri deplasabile au forma:

Structuri cu noduri fixe.

-bara dublu încastrată ij:

(3.31) K $M_{ij} = m_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j$

$M_{ji} = m_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j$

-bara încastrată-articulată ik:

(3.32) K $M_{ik} = m_{ik} - 3i_{ik}\theta_i$

unde m_{ij} m_{ji} şi m_{ik} reprezintă momente de încastrare perfectă, produse de forţele date. Simbolul respectiv îşi conţine şi semnul, forţele reale putînd avea sensuri diferite.

Structuri cu noduri deplasabile:

Pentru aceste structuri la expresiile obţinute pentru structurile cu noduri fixe se adaugă şi efectul translaţiei de nod (rotirea barei).

-bara dublu încastrată ij:

(3.33) K $M_{ij} = M_{ji} = m_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij}$

-bara încastrată-articulată ik:

(3.34) K $M_{ik} = m_{ik} - 3i_{ij}\theta_i + 3i_{ik}\psi_{ik}$

3.7 Structuri cu noduri fixe

La un cadru oarecare cu noduri fixe, în metoda deplasărilor necunoscute sînt rotirile de nod şi deci numărul necunoscutelor este egal cu numărul nodurilor rigide. Rezolvarea se face folosind mai puţine necunoscute ca în metoda eforturilor. La structurile cu noduri fixe translaţia nodurilor este împiedicată pe orice direcţie de legăturile reale ale acestora.

Prezentarea modului de rezolvare se face considerînd structura din figura 3.11a. Într-o primă fază se stabileşte categoria din care face parte structura prin crearea structurii auxiliare.

Concret în cazul de faţă se obţine:

$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$

Rezultă de aici că structura auxiliară este invariabilă geometric iar structura reală este o structură cu noduri fixe.

Următoarea etapă constă în crearea sistemului de bază prin introducerea de blocaje de nod în toate nodurile rigide ale structurii (fig.3.8b).

Ecuaţiile de condiţie care se scriu sînt ecuaţii de echilibru static şi sînt stabilite pe baza comportării identice dintre structura reală şi sistemul de bază încărcat cu forţe şi deplasările necunoscute ale nodurilor. Reacţiunile totale în blocaje produse de aceste încărcări, trebuie să fie nule deoarece nodurile structurii reale se pot deplasa.

Aceasta înseamnă că legăturile suplimentare din nodurile 1 şi 2 să nu existe, respectiv echivalentul lor mecanic (reacţiunea totală din fiecare legătură) să fie egală cu zero: $R_1 = 0, \text{K}\, R_2 = 0$

Dezvoltat condiţiile de mai sus au forma:

(3.35)
$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1p} &= 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned}$$

Sistemul (3.35) reprezintă sistemul ecuaţiilor de condiţie.

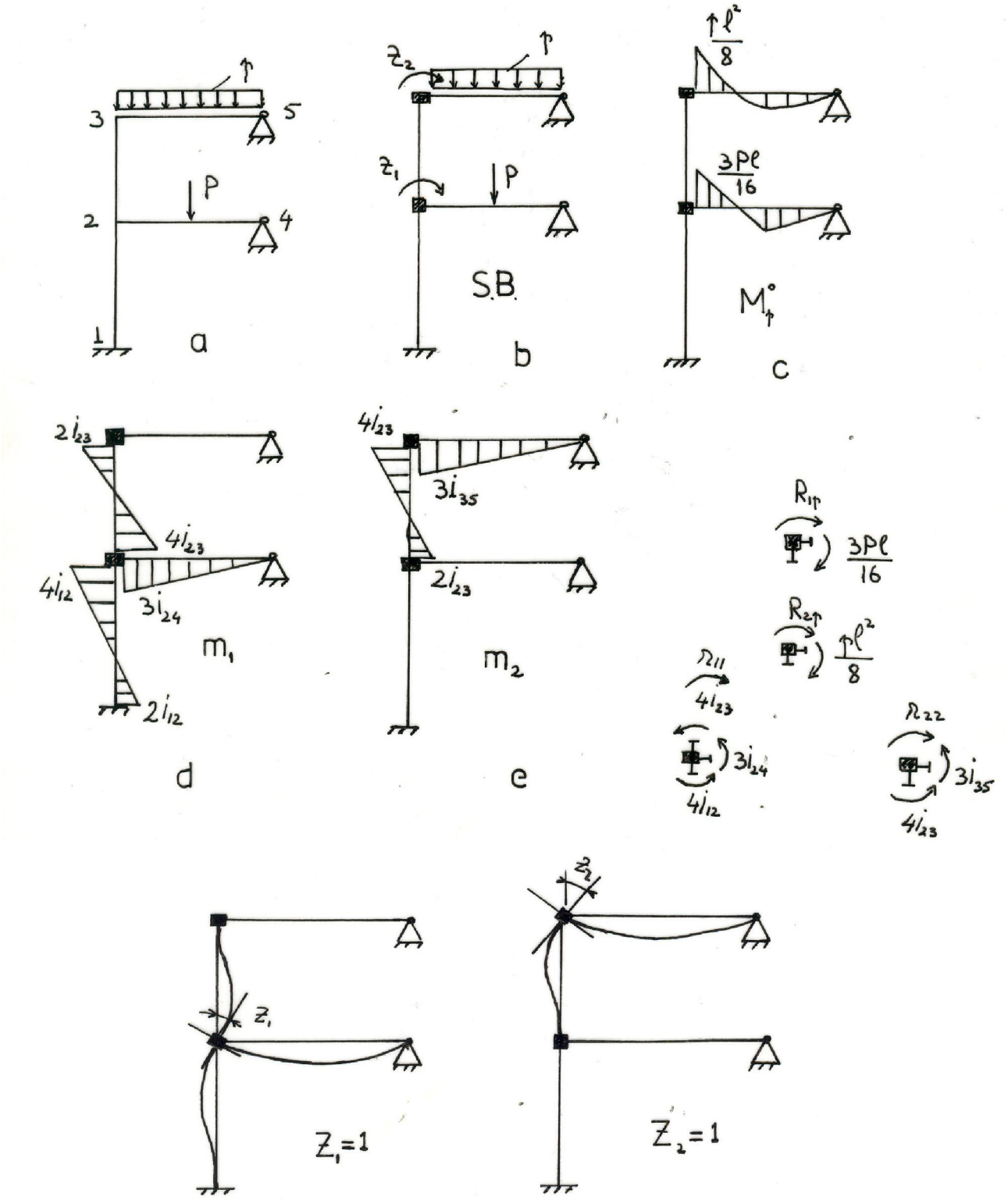


Fig.3.8 Exemplu structură cu noduri fixe. a) structură iniţială; b)sistem de bază; c)diagramă M_p^0; d,e)diagrame unitare

Ecuaţiile de mai sus exprimă faptul că reacţiunea moment în blocajul oricărui nod la rotire din încăcarea sistemului de bază cu deplasările reale ale nodurilor şi încărcările date este nulă (R_i=0). Necunoscutele z_1 ,z_2 sînt deplasări ale nodurilor, în cazul de faţă rotiri.

Coeficienţii necunoscutelor sînt reacţiuni unitare, ce apar în legăturile suplimentare în cazul în care sistemul de bază este încărcat cu o rotire egală cu unitatea.

Astfel o reacţiune de forma r_{ii} este coeficientul necunoscutei principale din ecuaţia i şi reprezintă reacţiunea ce apare în legătura suplimentară i cînd sistemul de bază este încărcat cu rotirea $z_i=1$. Această reacţiune este totdeauna mai mare ca zero.

Coeficienţii r_{ij} reprezintă reacţiunea moment ce se dezvoltă în legătura suplimentară i din încărcarea sistemului de bază cu rotirea $Z_j = 1$

Reacţiunile unitare satisfac condiţia de reciprocitate adică $r_{ij} = r_{ji}$.

Termenii liberi de tip R_{ip} reprezintă reacţiunea moment ce se dezvoltă în legătura suplimentară i din încărcarea sistemului de bază cu încărcările date (forţe, variaţii de temperatură, cedări de reazeme).

Termenii liberi pot fi pozitivi, negativi sau egali cu zero, dar cu condiţia ca cel puţin un termen liber să fie diferit de zero.

Încărcînd succesiv sistemul de bază cu forţele date şi cu deplasările $z_1=1$, $z_2=1$ se obţin diagramele de momente încovoietoare M_p^0 (fig.3.8c),m_1 şi m_2 (fig.3.8d,e). Înainte de trasarea diagramelor unitare de moment este preferabil să se traseze forma deformată a sistemului de bază pentru a se stabili fibra întinsă, prin rotirea nodului respectiv.

Totodată pentru trasarea diagramelor unitare de moment este necesară calcularea rigidităţilor practice ale barelor $i = \frac{EI}{l}$.Odată trasate diagramele unitare şi diagrama $M_p{}^0$ urmează calcularea reactiunilor din blocajele de nod. Scriind condiţia $\sum M_i = 0$ se determină reacţiunile (valoare şi semn). De observat că toate reacţiunile se desenează în sensul pozitiv în convenţia de semne adoptată.

$r_{11} - 4i_{23} - 3i_{24} - 4i_{12} = 0, \text{K}\; r_{11} = 4i_{23} + 3i_{24} + 4i_{12}$

$r_{22} - 3i_{35} - 4i_{23} = 0 \;\; r_{22} = 3i_{35} + 4i_{23}$

Reacţiunile R_{1p} şi R_{2p}, se determină tot prin izolare de nod.

În final se determină rotirile Z_1 si Z_2 , apoi se determină valorile finale ale momentelor încovoietoare prin suprapunere de efecte folosind relaţia : $M = M_p{}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$

Exemplul 3.1: Să se rezolve structura din fig.3.9 utilizînd metoda deplasărilor.

Calculul numărului de grade de libertate cinematică:

$W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$, rezultă că structura este o structură cu noduri fixe.

Pentru calculul valorii momentelor încovoietoare din diagramele unitare se calculează rigidităţile practice. Se obişnuieşte să se aleagă o rigiditate practică de comparaţie notată cu i_0 în funcţie de care se exprimă toate rigidităţile practice ale barelor.

Calcul rigidităţi practice: $i_o = \frac{EI}{3,5}$; $i_{24} = \frac{2EI}{6}\frac{3,5}{3,5} = 1,16i_o$; $i_{45} = \frac{3EI}{4}\frac{3,5}{3,5} = 2,62i_0$

Sistemul ecuaţiilor de condiţie are forma:

$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0$

$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi se obţin prin izolare de nod:

$r_{11} = 8,64i_0$; $r_{22} = 16,5i_0$; $r_{12} = 2,32i_0$

$R_{1p} = -45$; $R_{2p} = 15$

Sistemul de ecuaţii capătă forma:

$8,64Z_1 + 2,32Z_2 - 45 = 0$

$2,32Z_1 + 16,5Z_2 + 15 = 0$

$Z_1 = 5,66; Z_2 = 1,70$

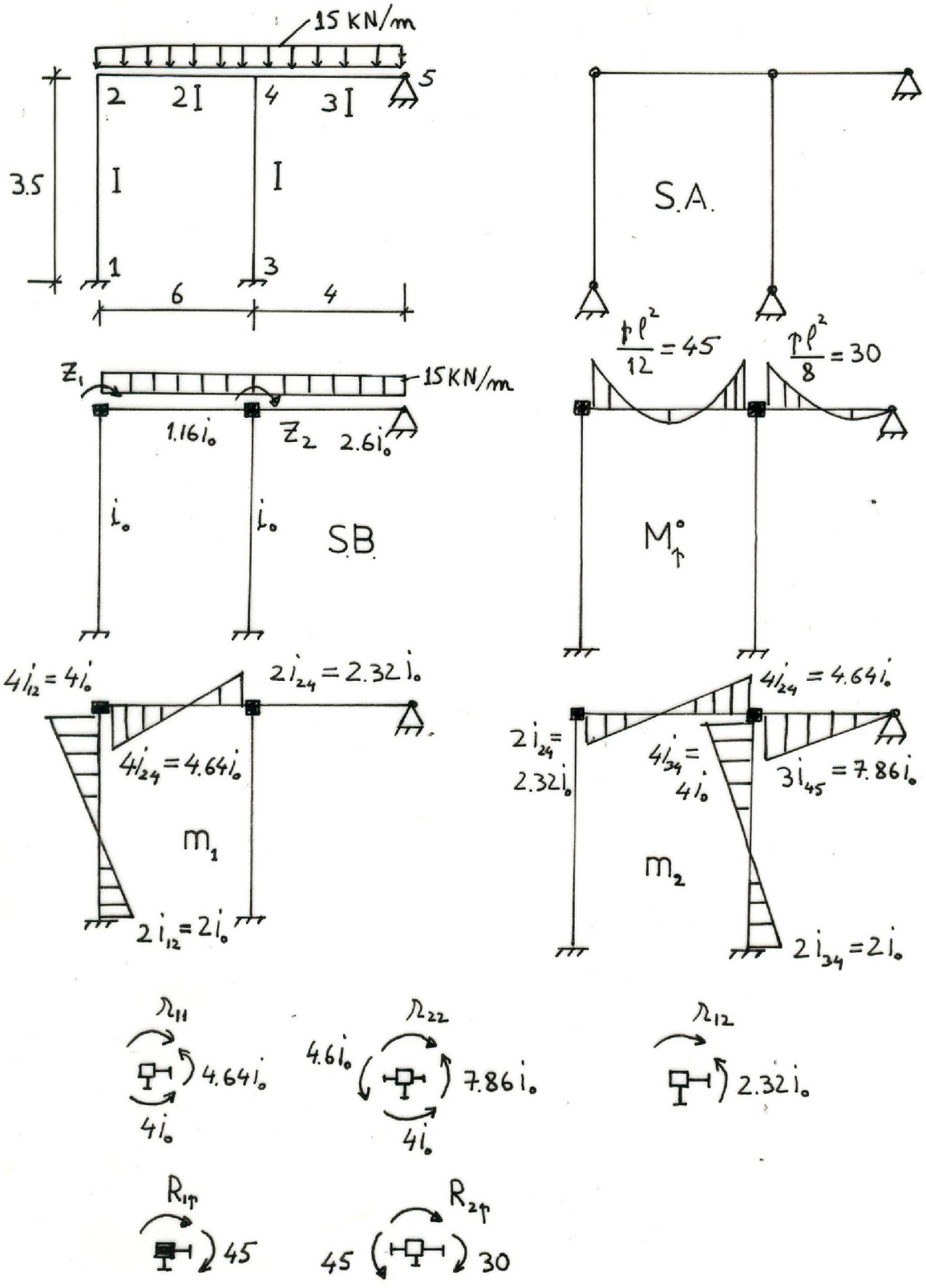


Fig.3.9 Exemplu structură cu noduri fixe

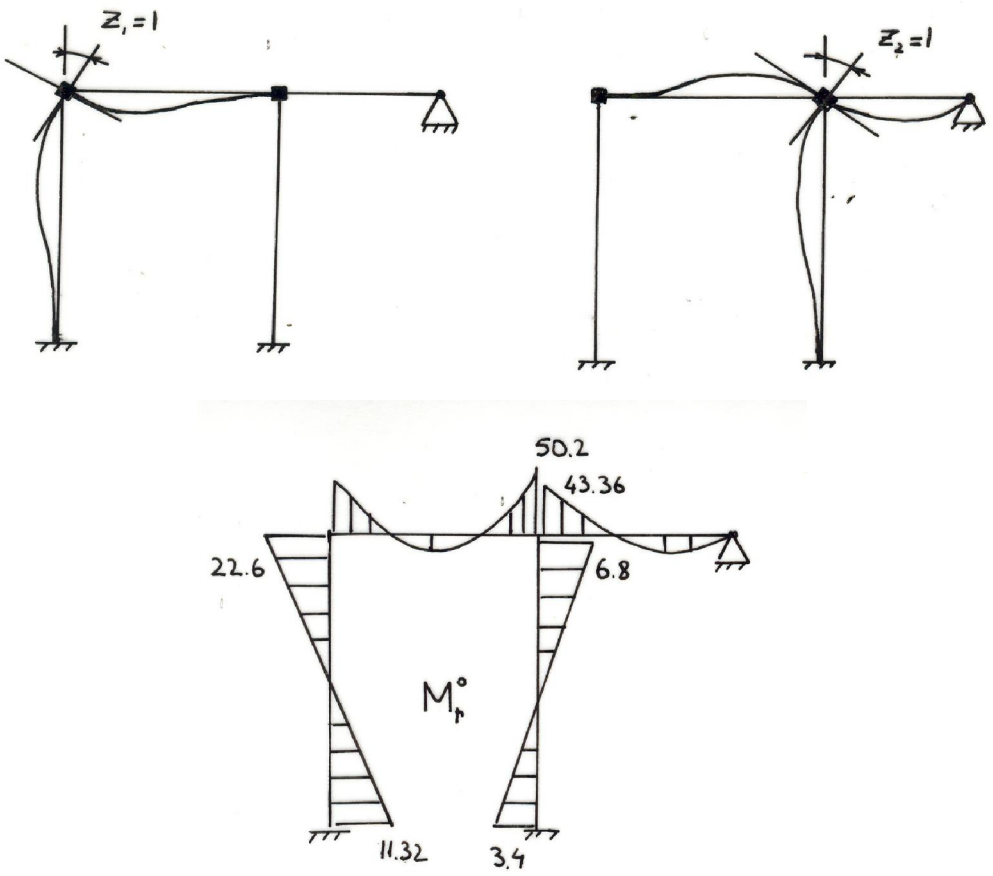


Fig.3.10 Forme deformate pentru Z_1=1şi Z_2=1, diagramă finală de moment încovoietor

Trasarea diagramei finale (fig.3.10) se face prin suprapunere de efecte:

$M = M_p{}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$

$M_{12} = 2 \cdot 5{,}66 = 11{,}32$

$M_{21} = 4 \cdot 5{,}66 = 22{,}64$

$M_{24} = -45 + 4{,}64 \cdot 5{,}66 - 2{,}32 \cdot 1{,}7 = -22{,}68$

$M_{42} = 45 + 2{,}32 \cdot 5{,}66 - 4{,}64 \cdot 1{,}7 = 50{,}24$

$M_{45} = -30 - 7{,}86 \cdot 1{,}7 = -43{,}36$

$M_{43} = 4 \cdot (-1{,}7) = -6{,}8$

$M_{34} = -2 \cdot 1{,}7 = -3{,}4$

Exemplul 3.2: Pentru structura din fig.3.11 să se traseze diagrama de moment încovoietor folosind metoda deplasărilor, prin scrierea sistemului de ecuaţii.

Într-o primă etapă se crează structura auxiliară prin introducerea articulaţiilor în toate nodurile rigide. Prin intermediul acestei structuri auxiliare se determină dacă structura este cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile. Prin aplicarea relaţiei $W = 3B - 2A - S$; $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$,rezultă că avem de-a face cu o structură cu noduri fixe.

Sistemul de bază a fost obţinut prin blocarea celor două noduri rigide. Condiţia globală impusă sistemului de bază este: R_1=0 R_2=0, respectiv:

$r_{11} z_1 + r_{12} z_2 + R_{1p} = 0$

$r_{21} z_1 + r_{22} z_2 + R_{2p} = 0$

Ulterior se trasează diagrama M_p^0 care se obţine din încărcarea sistemului de bază cu forţele exterioare. Tot pe sistemul de bază se trasează şi diagramele unitare m_1 şi m_2 obţinute prin rotaţia unitară a unui nod rigid. Pentru m_1, spre exemplu, se roteşte nodul corespunzător primei necunoscute.

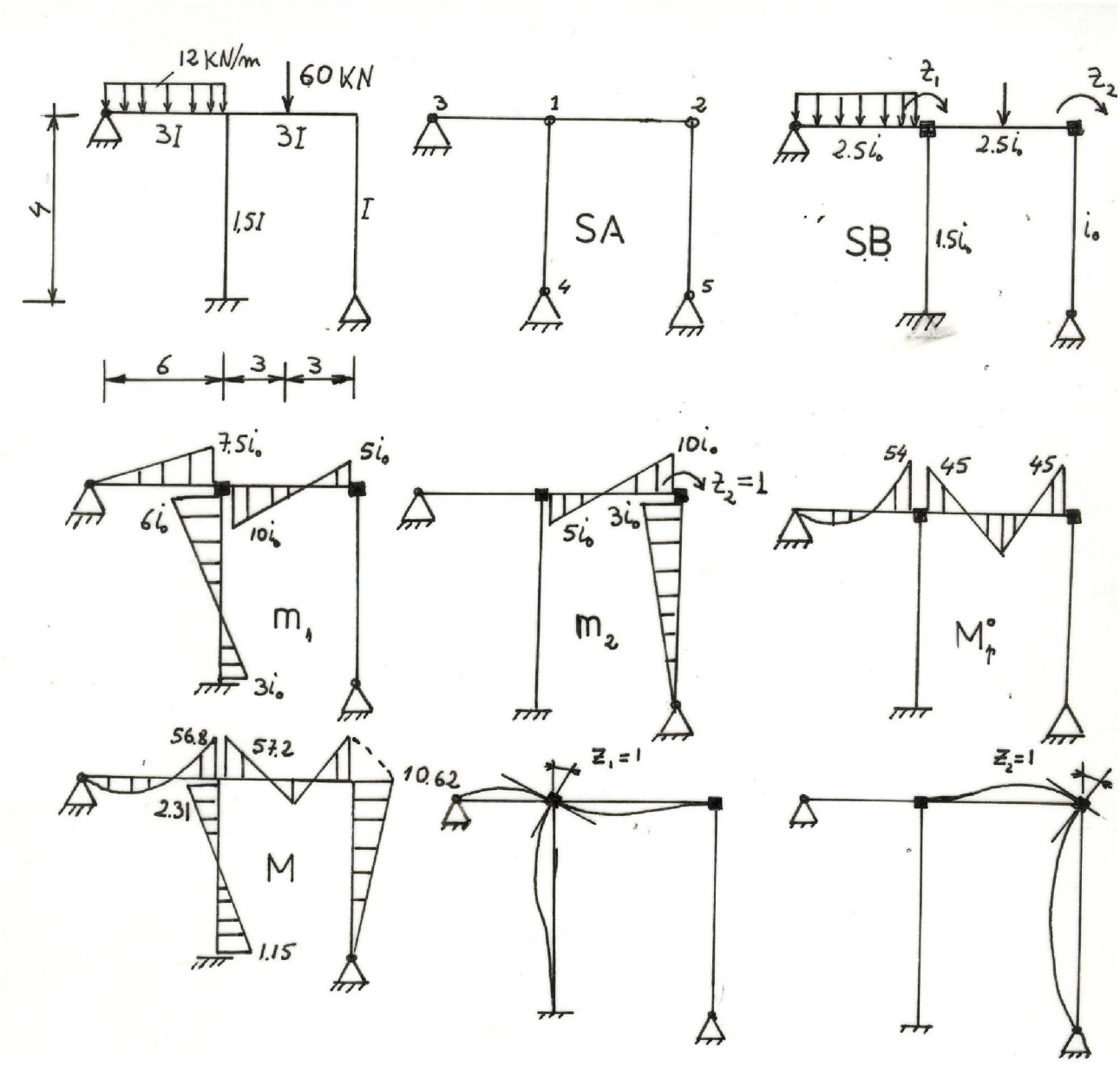


Fig.3.11 Exemplu structuri cu noduri fixe

Alegînd i_0=EI/5 pentru bare rezultă:

$$i_{12} = \frac{3EI}{6}\frac{5}{5} = 2{,}5i_0 \quad i_{14} = \frac{1{,}5EI}{5} = 1{,}5i_0$$

$$i_{13} = \frac{3EI}{6}\frac{5}{5} = 2{,}5i_0, i_{25} = \frac{EI}{5} = i_0$$

Încărcînd sistemul de bază cu forţele exterioare date rezultă diagrama M_p^0. Valorile momentelor încovoietoare din această diagramă sînt:

$$m_{13} = \frac{pl^2}{8} = \frac{12 \cdot 6^2}{8} = 54KNm$$

$$m_{12} = -m_{21} = \frac{Pl}{8} = \frac{60 \cdot 6}{8} = 45KNm$$

Calculul reacţiunilor unitare şi termenilor liberi se obţin prin izolare de nod:

$r_{11} - 10i_0 - 6i_0 - 7{,}5i_0 = 0 \text{ K } r_{11} = 23{,}5i_0$

$r_{12} - 5i_0 = 0 \text{ K } r_{12} = 5i_0$

$R_{1p} + 45 - 54 = 0 \text{ K } R_{1p} = 9$

$r_{21} - 5i_0 = 0 \text{ K } r_{21} = 5i_0$

$r_{22} - 10i_0 - 3i_0 = 0 \text{ K } r_{22} = 13i_0$

$R_{2p} - 45 = 0 \text{ K } R_{2p} = 45$

Se observă că $r_{12}=r_{21}$ Această condiţie reprezintă modalitatea de verificare a calculelor.

Sistemul de ecuaţii este:

$23{,}5z_1 + 5i_0 z_2 + 9 = 0$

$5i_0 z_1 + 13i_0 z_2 + 45 = 0$

de unde rezultă $z_1=0{,}385/i_0$,$z_2=-3{,}61/i_0$

Cu aceste valori se calculează momentele încovoietoare finale.

De exemplu, folosind momentele pe nod, rezultă:

$M_{13} = -54 - 7{,}5i_0 \cdot 0{,}385 / i_0 = -56{,}89KNm$

$M_{14} = -6i_0 \cdot 0{,}385 / i_0 = 2{,}31KNm$

$M_{12} = 45 - 10i_0 \cdot 0{,}385 / i_0 - 5i_0(-3{,}6i / i_0) = 59{,}2KNm$

$M_{21} = -45 - 5i_0 \cdot 0{,}385 / i_0 - 10i_0(-3{,}61 / i_0) = -10{,}825KNm$

$M_{23} = -3i_0(-3{,}61 / i_0) = 10{,}83KNm$

$M_{41} = -3i_0 \cdot 0{,}385 / i_0 = 1{,}555KNm$

Se constată că rigiditatea practică de comparaţie i_0 nu intervine în expresia momentelor încovoietoare finale. Din această cauză în calculul practic se consideră de la început $i_0 = \frac{EI}{l} = 1$

Diagrama de forţă tăietoare se obţine după regulile prezentate la metoda eforturilor, deoarece numai modalitatea de a obţine diagrama de momente încovoietoare este alta în metoda deplasărilor.

Exemplul 3.3: Să se traseze diagrama de moment încovoietor pentru structura din figura 3.12

Pe baza structurii auxiliare se determină numărul de grade de libertate elastică cu relaţia:

$W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \rightarrow S.N.F.$

Alegînd $i_0 = \frac{EI}{5}$ se pot calcula rigidităţile practice ale barelor:

$i_o = \frac{EI}{5}$; $i_{34} = \frac{1{,}5EI}{8}\frac{5}{5}1{,}5 = 0{,}93i_o$

$i_{45} = \frac{3EI}{6}\frac{5}{5} = 2{,}5i_o$; $i_{24} = \frac{2EI}{5{,}38}\frac{5}{5} = 1{,}7i_o$

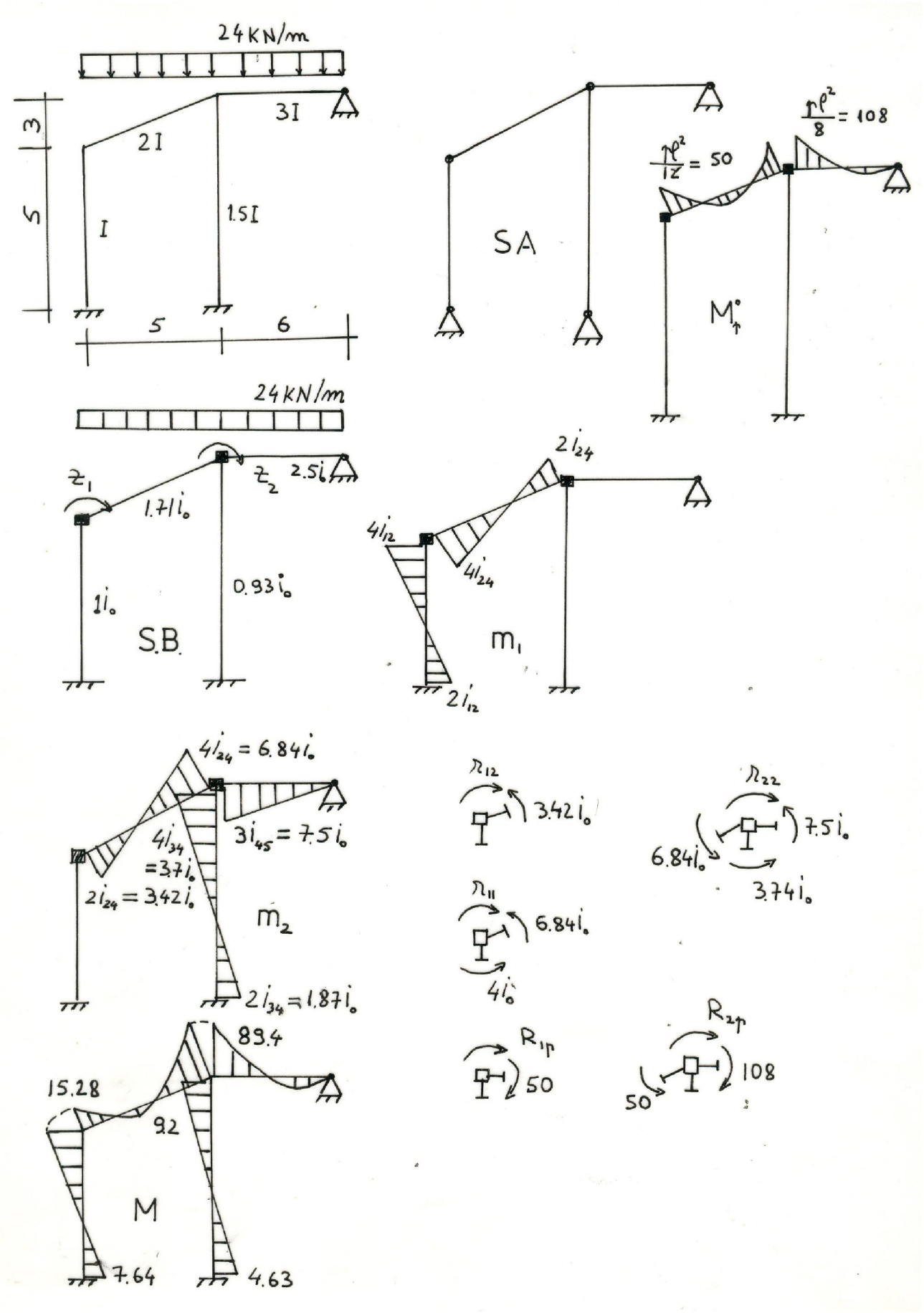


Figura 3.12 Exemplu structură cu noduri fixe

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi sînt obţinuţi prin izolare de nod aşa cum se observă în figura 3.23.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie are forma:

$$10{,}84Z_1 + 3{,}42Z_2 - 50 = 0$$

$$3{,}42Z_1 + 18{,}08Z_2 - 58 = 0$$

$$Z_1 = 3{,}82;\ Z_2 = 2{,}48$$

Diagrama finală se obţine prin suprapunere de efecte:

$$M = M_p{}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

$$M_{12} = 2 \cdot 3{,}82 = 7{,}64$$

$$M_{21} = 4 \cdot 3{,}82 = 15{,}28$$

$$M_{24} = -50 + 6{,}84 \cdot 3{,}82 + 3{,}42 \cdot 2{,}48 = -15{,}38$$

$$M_{42} = 50 + 3{,}42 \cdot 3{,}82 + 6{,}84 \cdot 2{,}48 = 80{,}02$$

$$M_{45} = -108 + 7{,}5 \cdot 2{,}48 = -89{,}4$$

$$M_{43} = 3{,}74 \cdot 2{,}48 = 9{,}28$$

$$M_{34} = 1{,}87 \cdot 2{,}48 = 4{,}63$$

3.8 Structuri cu noduri deplasabile

Structurile cu noduri deplasabile sînt structuri la care necunoscutele sînt atît rotirile nodurilor cît şi translaţiile pe direcţiile gradelor de libertate elastică. Modul de calcul este într-o oarecare măsură similar cu cel de la structurile cu noduri fixe. Apar noi în cazul acestui tip de structuri diagramele unitare din deplasările elastice pe direcţia gradelor de libertate elastică.

Pentru trasarea acestor diagrame este necesară în prealabil obţinerea diagramelor de deplasări virtuale considerînd o deplasare unitară pe direcţia gradelor de libertate elastică. Aceste diagrame de deplasări virtuale se vor dezvolta atît pe orizontală cît şi pe verticală pentru structuri cu stîlpi înclinaţi sau rigle înclinate în două ape şi numai pe orizontală pentru structuri cu stîlpi verticali şi rigle orizontale.

Aceste diagrame de deplasări virtuale permit identificarea translaţiilor nodurilor sau a rotirilor barelor, pe baza acestora putîndu-se trasa formele deformate pentru aceste deplasări elastice. Odată trasate formele deformate acestea reprezintă baza pentru trasarea diagramelor unitare din deplasări elastice. La trasarea acestora se ţine cont de modul de rotire al barelor.

În cazul acestor structuri numărul de necunoscute este egal cu numărul nodurilor rigide plus numărul gradelor de libertate elastică.

Sistemul de bază la structurile cu noduri deplasabile se obţine blocînd rotirile nodurilor rigide prin blocaje de nod şi translaţiile pe direcţiile gradelor de libertate prin legături de grad de libertate.

Reacţiunile pe direcţiile gradelor de libertate elastică se pot obţine atît prin ecuaţii de proiecţie cît şi prin utilizarea principiului lucrului mecanic virtual în cazul structurilor cu stîlpi verticali şi rigle orizontale.

Pentru structurile cu stîlpi înclinaţi sau rigle înclinate în două ape calculul acestor reacţiuni se poate face numai utilizînd principiul lucrului mecanic virtual. La calculul reacţiunilor unitare, spre exemplu r_{ij} se folosesc momentele pe bară din diagrama m_j şi diagrama de deplasări virtuale corespunzătoare gradului de libertate elastică „i”.

La calculul reacţiunilor, pe direcţiile gradelor de libertate elastică, R_{ip} se folosesc forţele exterioare care acţionează pe structură şi momentele pe bară din diagrama $M_p{}^0$.

Etapele de calcul sînt aceleaşi cu cele prezentate la structurile cu noduri fixe.

Exemplul 3.4: Să se rezolve structura cu noduri deplasabile din figura 3.13.

Într-o primă etapă se stabilesc numărul de grade de libertate cinematică cu relaţia: $W = 3B - 2A - S$, $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$

Sistemul de bază se obţine blocînd rotaţia nodului rigid cu un blocaj de nod şi deplasarea pe direcţia gradului de libertate prin intermediul unui blocaj de grad de libertate.

Calcul rigidităţi practice: $i_0 = \frac{EI}{6}$; $i_{12} = \frac{1{,}5EI}{8} \cdot \frac{6}{6} = 1{,}125 i_0$; $i_{34} = \frac{EI}{8} \cdot \frac{6}{6}$

Diagrama unitară m_1 se obţine din încărcarea sistemului de bază cu o rotire unitară a nodului rigid, prezentată în figura 3.13. Diagrama unitară m_2 se obţine din încărcarea sistemului de bază cu o translaţie unitară pe direcţia gradului de libertate cinematică.

Reacţiunea r_{11} se obţine din izolarea nodului rigid şi scrierea ecuaţiei de echilibru static: $r_{11} - 9i_0 - 4{,}5i_0 = 0 \rightarrow r_{11} = 13{,}5i_0$

Reacţiunea r_{22} se obţine folosind principiul lucrului mecanic virtual, diagrama de deplasări virtuale fiind prezentată în figura 3.13.

$$r_{22} \cdot 1 - \frac{1}{8}(2 \cdot 0{,}84 + 2 \cdot 0{,}28) = 0 \rightarrow r_{22} = 0{,}28 i_0$$

Reacţiunea r_{12} o obţinem prin izolare de nod: $r_{12} + 0{,}84 i_0 = 0 \rightarrow r_{12} = -0{,}84 i_0$

Ecuaţia pentru obţinerea reacţiunii R_{1p} are forma: $R_{1p} - 80 = 0 \rightarrow R_{1p} = 80$

Reacţiunea R_{2p} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual (fig. 3.15a):

$$R_{2p} \cdot 1 + 120 \cdot 0{,}5 = 0 \rightarrow R_{2p} = -60$$

Sistemul ecuaţiilor de condiţie capătă astfel forma:

$$13{,}5Z_1 - 84Z_2 + 80 = 0$$

$$-84Z_1 + 0{,}28Z_2 - 60 = 0$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii se obţin necunoscutele $Z_1 = 9{,}8$ şi $Z_2 = 241{,}6$

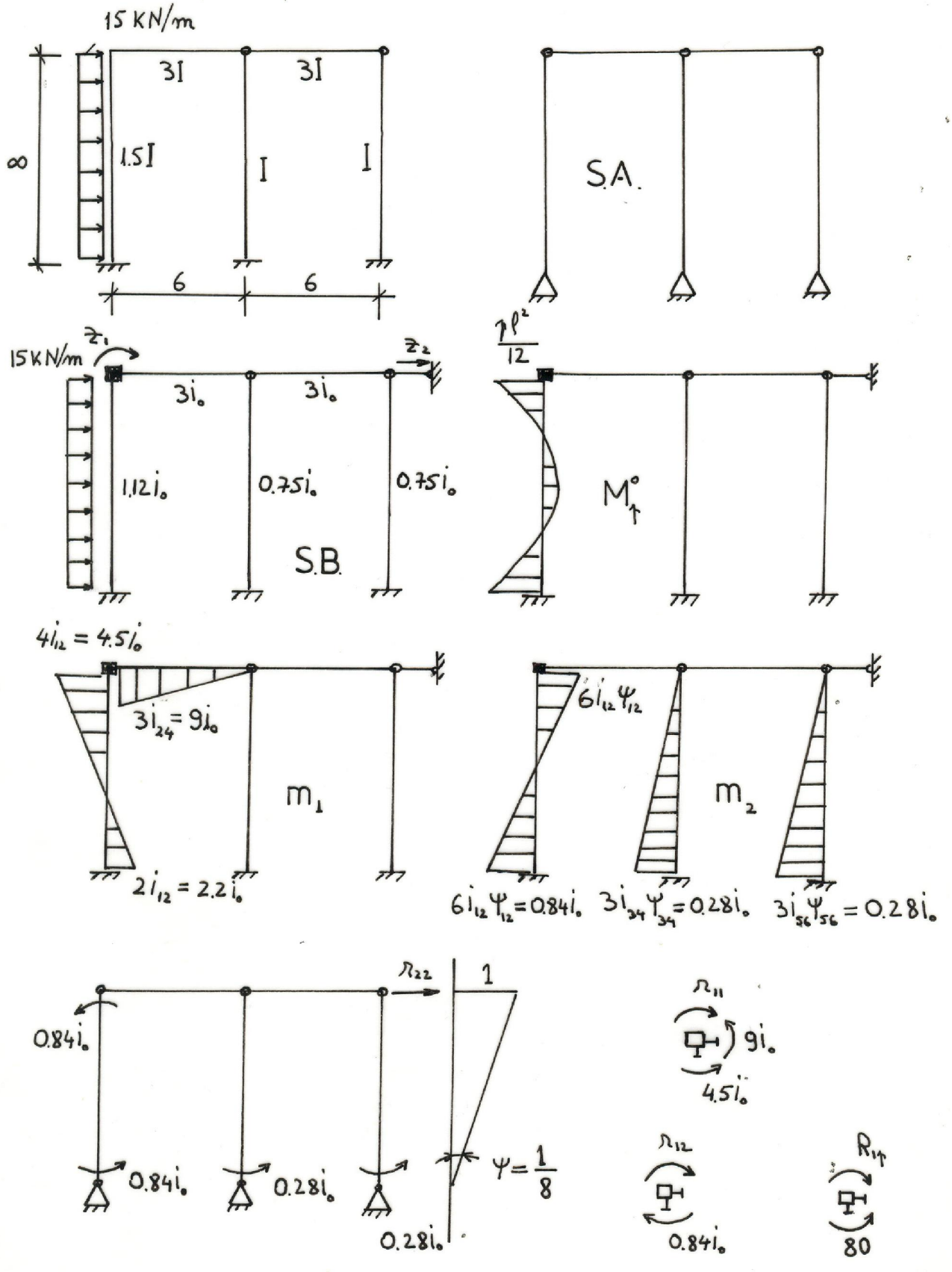


Figura 3.13 Exemplu rezolvare structură cu noduri deplasabile

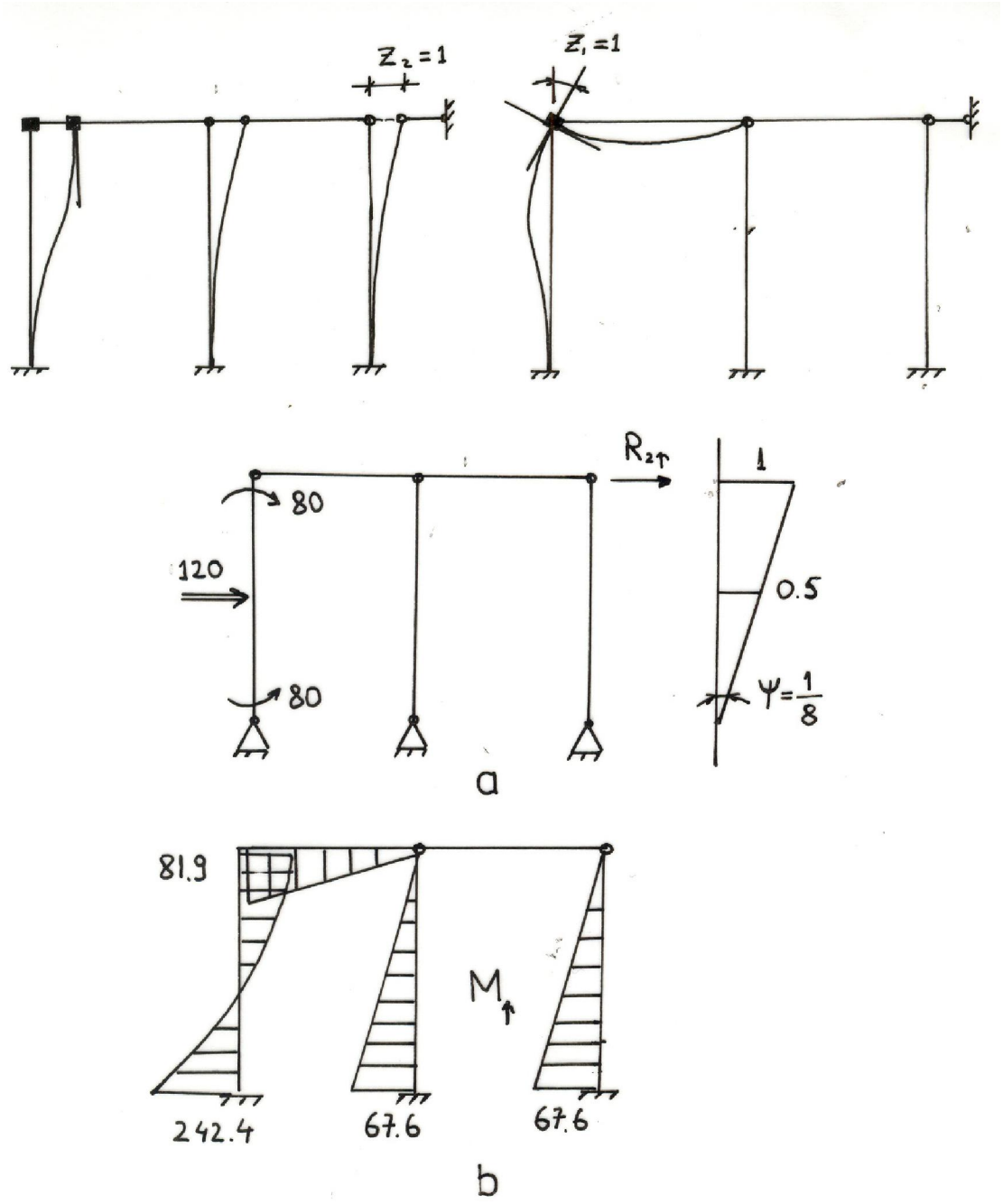


Fig.3.14 Forme deformate pentru $Z_1 = 1, Z_2 = 1$. Obţinerea reacţiunii R_{2p}; b. Diagrama finală de moment

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte fiind prezentată în figura 3.14b

$M = M_p{}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$

$M_{12} = -80 + 2{,}25 \cdot 9{,}1 - 0{,}84 \cdot 241{,}6 = -262{,}4$

$M_{21} = 80 + 4{,}5 \cdot 9{,}1 - 0{,}84 \cdot 241{,}6 = -81{,}99$

$M_{34} = -0{,}28 \cdot 241{,}6 = -67{,}64$

Exemplul 3.5: Să se traseze diagrama de moment pentru structura cu noduri deplasabile din figura 3.15a.

Rezolvarea începe cu calculul numărului de grade de libertate cinematică: $W = 3B - 2A - S$;
$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_0 = \frac{EI}{4}$,valorile rigidităţilor practice fiind prezentate în figura 3.15c. Diagrama de momente M_p^0 se obţine din încărcarea sistemului de bază cu sarcinile exterioare aceasta fiind prezentată în figura 3.15d.

Diagrama unitară m_1 a fost obţinută din încărcarea sistemului de bază cu rotaţia Z_1=1 iar diagrama m_2 din încărcarea sistemului de bază cu Z_2=1.
Reactiunile r_{11} şi r_{12} se obţin prin izolare de nod şi scrierea ecuatiei de echilibru static, astfel: $r_{11}=16i_o$; $r_{12}=-1,5i_o$.
$R_{1p}=0$

$$R_{2p} \cdot 1 - 81 \cdot \frac{1}{6} + 108 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow R_{2p} = -40,5$$

Astfel sistemul de ecuaţii devine:

$$16Z_1 - 1,5Z_2 = 0$$
$$-1,5Z_1 + 0,83Z_2 - 40,5 = 0$$
$$Z_1 = 5,507; Z_2 = 58,74$$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte: $M = M_p^{\ 0} + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$

$$M_{12} = -81 - 0,5 \cdot 58,74 = -110,3$$
$$M_{21} = 0;\ M_{24} = 0$$
$$M_{42} = 6 \cdot 5,507 = 33,04$$
$$M_{34} = 2 \cdot 5,507 - 1,5 \cdot 58,74 = 77,1$$
$$M_{43} = 4 \cdot 5,507 - 1,5 \cdot 58,74 = 66,08$$
$$M_{45} = 6 \cdot 5,507 = 33$$

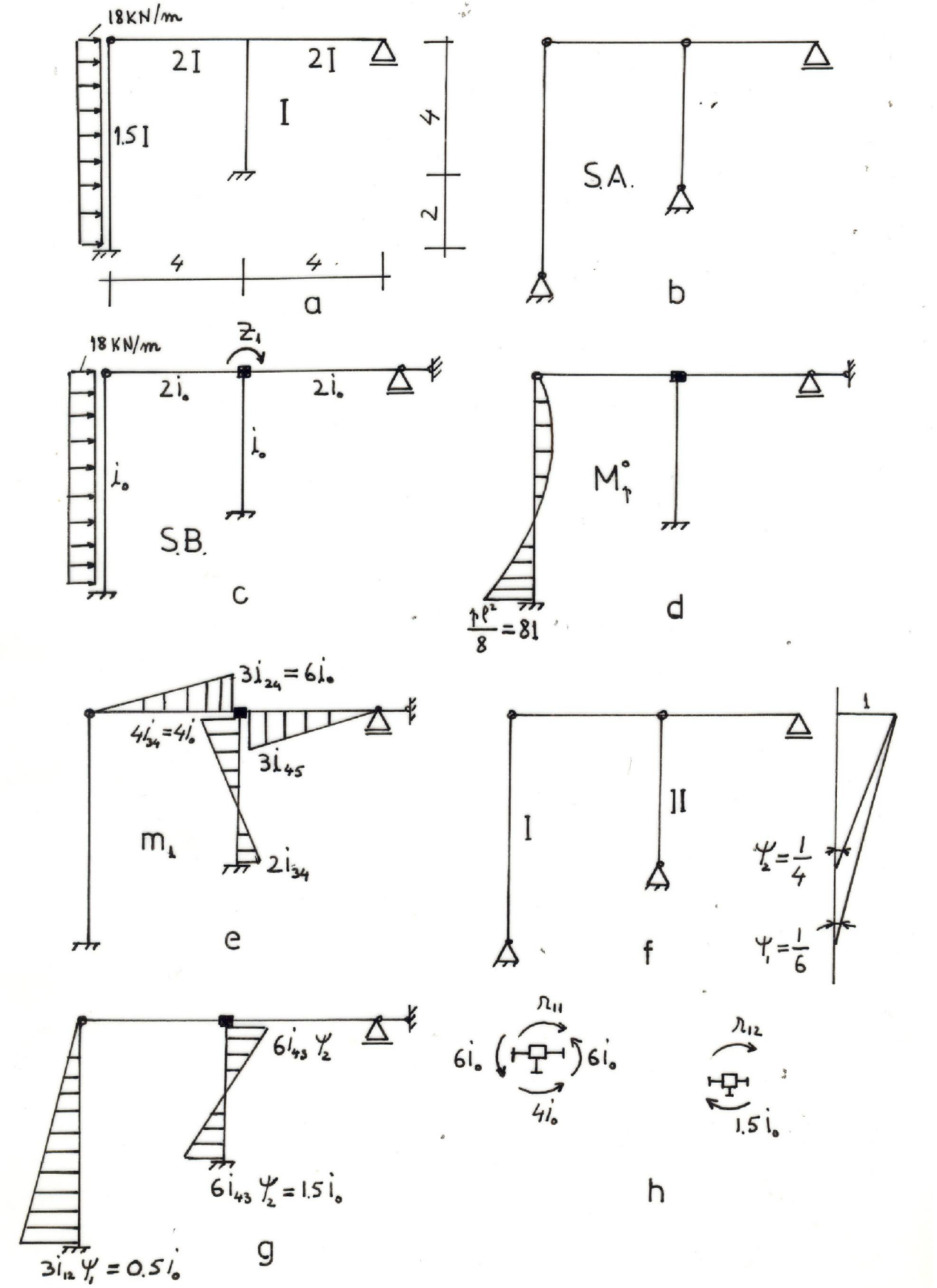


Fig.3.15 Structură cu noduri deplasabile; a. structură iniţială; b. structură auxiliară; c. sistem de bază d. diagrama M_p^o ;e. diagrama unitară m_1 ;f. diagramă deplasări virtuale ; g. digramă unitară m_2 ;h. calcul reacţiuni unitare prin izolare de nod

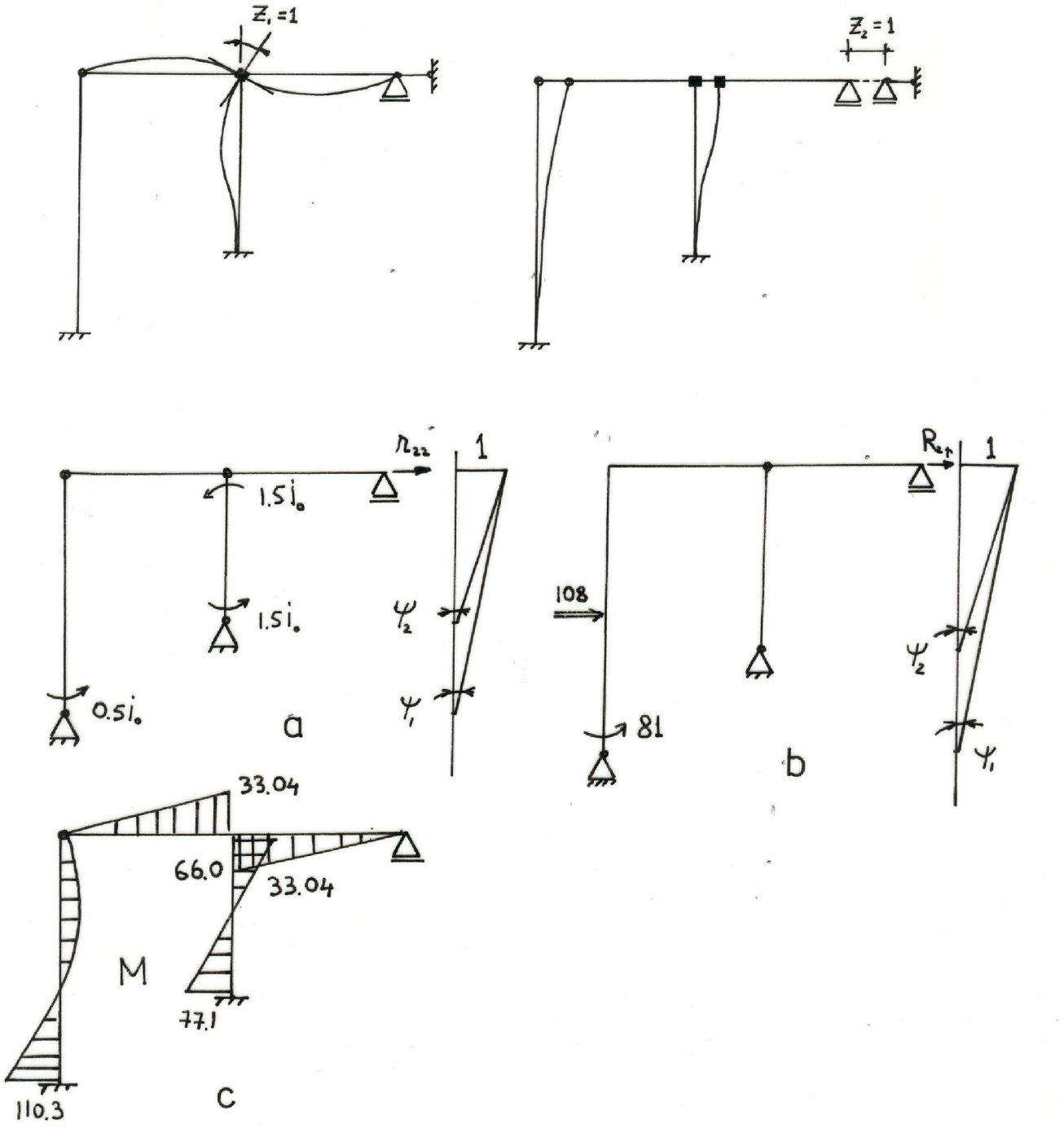


Fig.3.16 Forme deformate pentru $Z_1 = 1, Z_2 = 1$ a.Calcul reacţiune r_{22} folosind principiul lucrului mecanic virtual
b. calcul reacţiune R_{2p}; c. diagramă finală de moment

Exemplul 3.6:

Să se traseze diagrama de moment încovoietor şi de forţă tăietoare la structura din fig.3.17.
Din analiza structurii auxiliare rezultă:
$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$
un grad de libertate cinematică, deci structura reală este o structură cu noduri deplasabile avînd un grad de libertate elastică.

Sistemul de bază se obţine blocînd nodul rigid şi gradul de libertate, ceea ce înseamnă că problema comportă două necunoscute: o rotire şi o translaţie.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie:

$$r_{11} z_1 + r_{12} z_2 + R_{1p} = 0$$

$$r_{21} z_1 + r_{22} z_2 + R_{2p} = 0$$

Alegînd ca rigiditate practică de comparaţie $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$ se obţin următoarele valori pentru rigidităţile practice ale barelor.

$$i_{12} = \frac{2EI}{4} = 2, \text{K}\, i_{13} = \frac{3EI}{6}\frac{4}{4} = 2, \text{K}\, i_{34} = \frac{EI}{4} = 1$$

$$i_{15} = \frac{3EI}{6}\frac{4}{4} = 2$$

Încărcînd sistemul de bază cu forţele date rezultă diagrama M_p^0 cu rotirea $z_1=1$ rezultă diagrama m_1. Pentru determinarea efectului translaţiei nodurilor pe direcţia gradului de libertate se analizează modul în care se deplasează barele structurii auxiliare pentru o deplasare cinematică $z_2=1$. În urma acestei analize rezultă că riglele se translatează (centrul său absolut este la infinit) iar stîlpii se rotesc. Diagrama de deplasări virtuală şi diagrama unitară m_2 sînt date în fig.3.17.

Reacţiunile din blocajul de nod sînt:

$$r_{11} = 20, \text{K}\, r_{12} = -2, \text{K}\, R_{1p} = 0$$

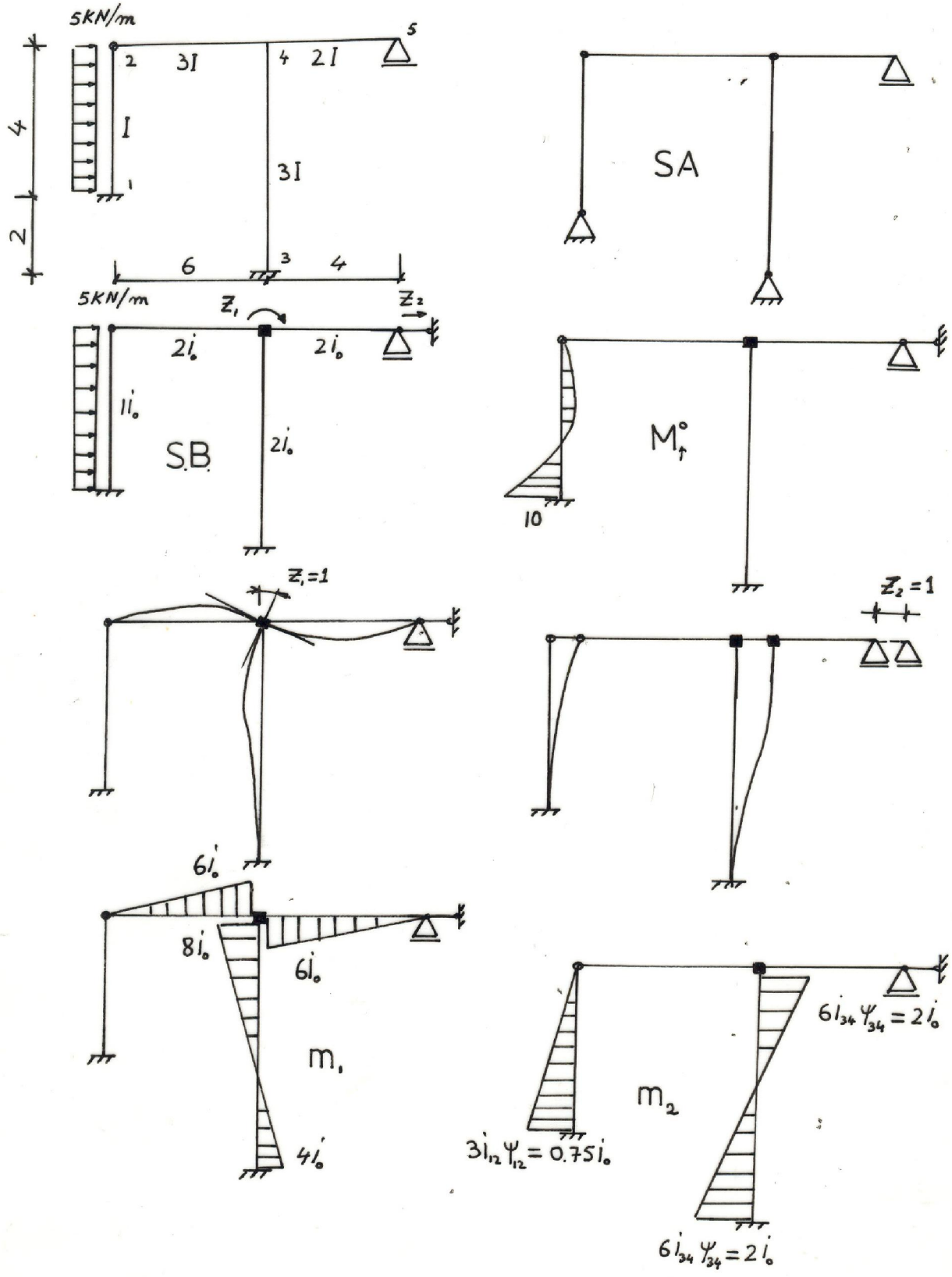


Fig.3.17 Exemplu rezolvare structură cu noduri deplasabile: structură iniţială, S.B.,diagramă M_p^0,forme deformate, diagrame unitare

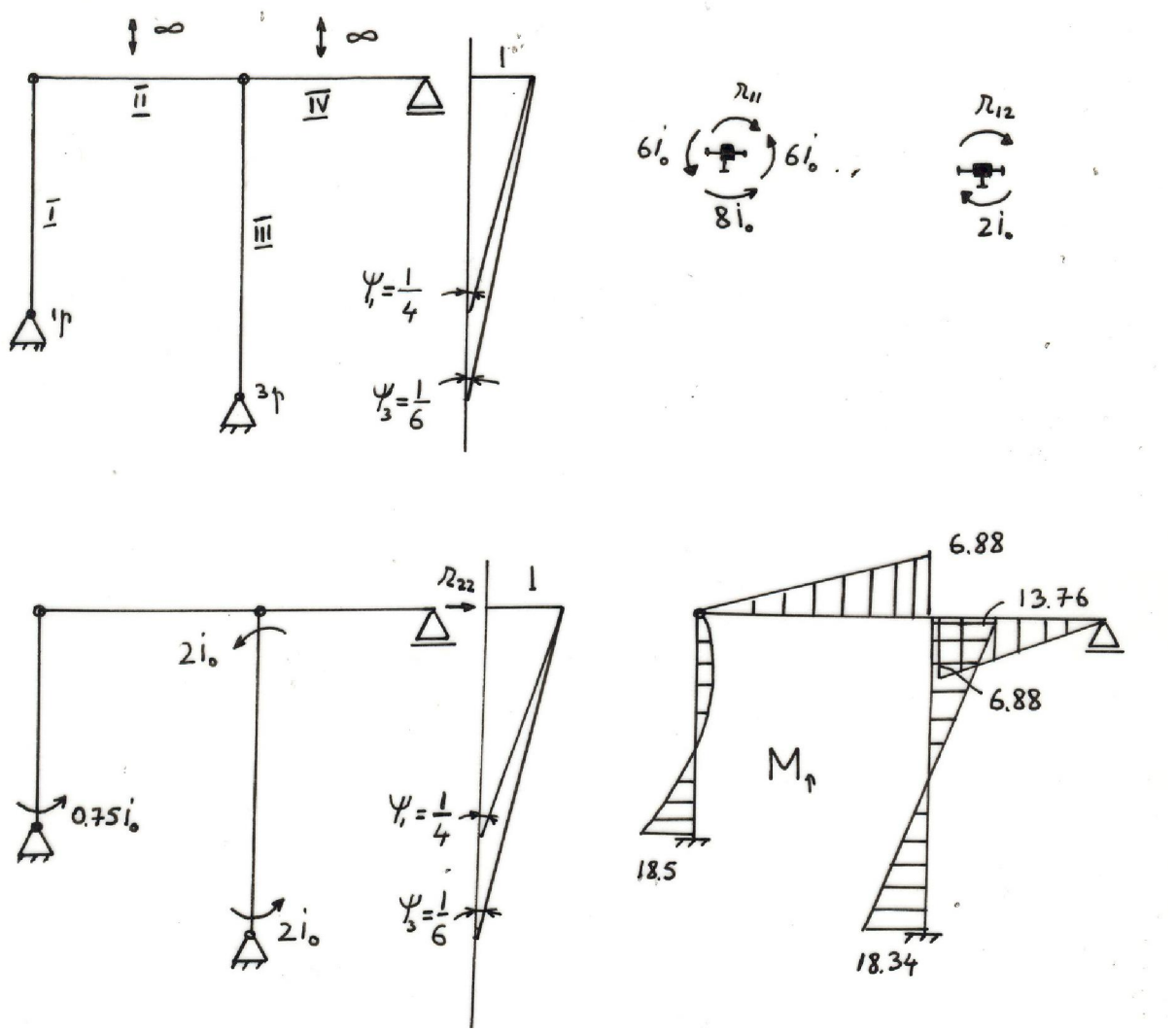


Fig.3.18 Diagramă de deplasări virtuale, calcul reacţiune r_{22} prin lucru mecanic virtual, diagramă finală de moment încovoietor

Reacţiunile din legătura de grad de libertate se determină utilizînd ecuaţia de proiecţie pe orizontală:

$$r_{11} = 6i_0 + 6i_0 + 8i_0 = 20i_0$$

$$r_{21} + (8i_0 + 4i_0)\frac{1}{6} = 0 \qquad r_{21} = -2\,\mathrm{i}_0$$

$$r_{22} - \frac{1}{4}0{,}75i_0 - 2 \cdot 2i_0 \cdot \frac{1}{6} = 0 \quad r_{22} = \frac{41}{48}i_0$$

$$R_{2p} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 10\frac{1}{4} = 0 \quad R_{2p} = -7{,}5$$

Cu aceste valori sistemul de ecuaţii devine:

$$20z_1 - 2z_2 = 0$$

$$-2z_1 + \frac{41}{48}z_2 - 7{,}5 = 0$$

de unde rezultă z_1=1,146, z_2=11,46

Diagrama de moment încovoietor pe structura reală se obţine calculînd valorile în secţiunile de la capetele barelor, prin suprapunere de efecte:

$$M_p = M_p{}^0 + m_1 z_1 + m_2 z_2$$

În fig.3.18 este prezentată diagrama de moment încovoietor.

Exemplul 3.7:
Să se traseze diagrama de moment încovoietor pentru structura din figura 3.19.a prin scrierea sistemului de ecuaţii.

Determinînd numărul de grade de libertate cinematică se observă că structura este o structură cu noduri deplasabile (fig.3.19.b).

$W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$

Sistemul de bază (3.19d) va avea două necunoscute: blocajul nodului rigid şi deplasarea pe direcţia gradului de libertate cinematică.

Rigidităţile practice:

$$i_o = \frac{EI}{6};\ i_{12} = \frac{EI}{3}\frac{6}{6} = 2i_o;\ i_{23} = \frac{EI}{6,7}\frac{6}{6} = 0,89i_0\ ;i_{34} = \frac{EI}{6} = i_0$$

În figura 3.19.c este prezentată diagrama M_p^0 obţinută din încărcarea sistemului de bază cu sarcinile exterioare. În figura 3.19.e este figurată diagrama unitară m_1 obţinută din încărcarea sistemului de bază cu o rotire unitară a nodului rigid, iar în fig.3.20.b diagrama unitară m_2 obţinută din încărcarea sistemului de bază cu o translaţie unitară pe direcţia gradului de libertate cinematică.

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi obţinuţi prin izolare de nod au valorile:

$r_{11} = 6,67i_0; R_{1p} = 45;\ r_{12} = -i_0$

Reacţiunea r_{22} se obţine prin lucru mecanic virtual :

$$r_{22} \cdot 1 - \frac{1}{6}(1i_0 + 1i_0) - \frac{1}{3}2i_0 = 0 \rightarrow r_{22} = 1i_0$$

Reacţiunea se obţine tot prin lucru mecanic virtual:

$R_{2p}:\ R_{2p} \cdot 1 + 26 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{2p} = -26$

Astfel sistemul de ecuaţii va avea forma:
$$\begin{aligned} 6,67Z_1 - Z_2 + 45 &= 0 \\ -Z_1 + Z_2 - 26 &= 0 \end{aligned}$$

$Z_1 = -3,35$

$Z_2 = 22,64$

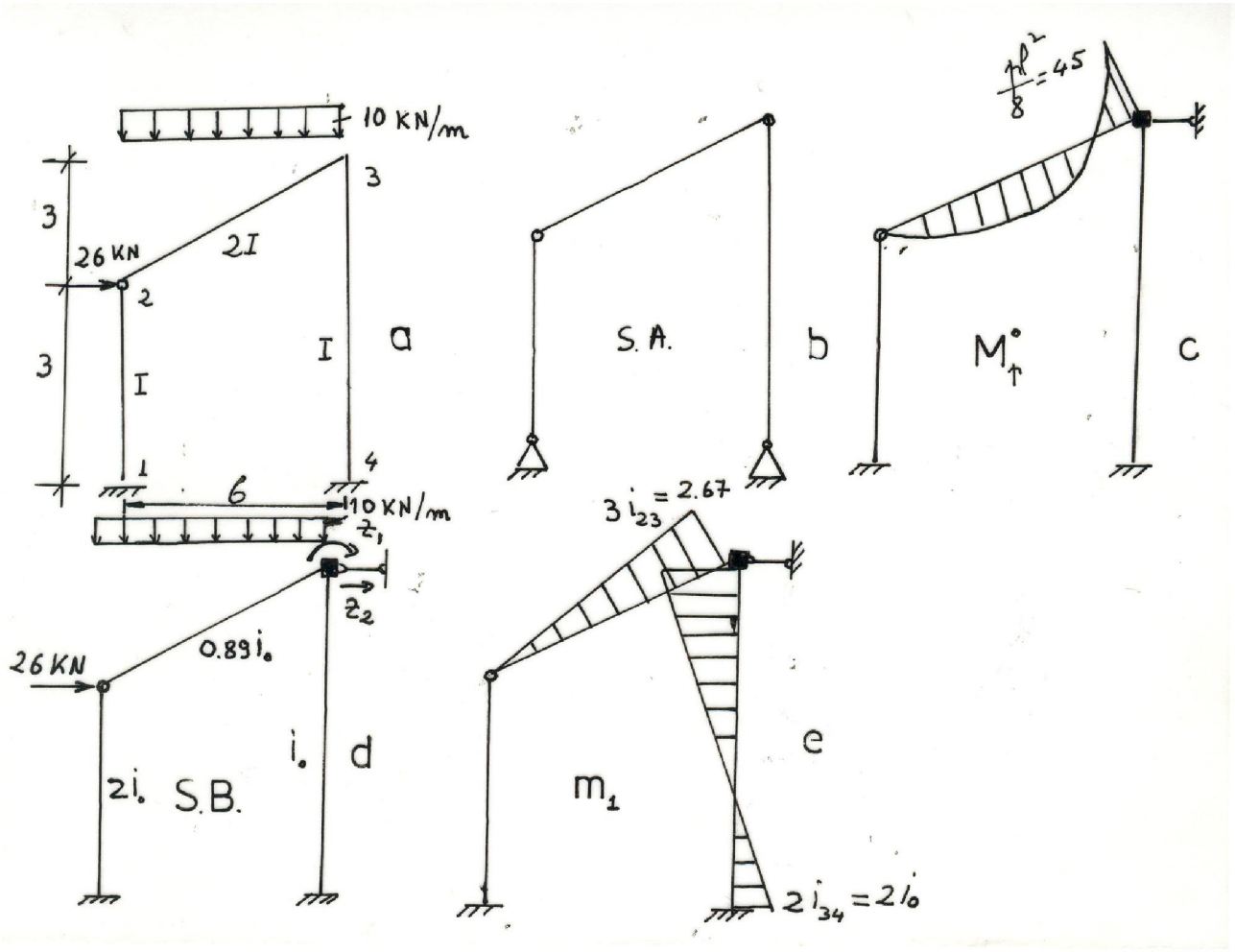


Fig.3.19 Exemplu structură cu noduri deplasabile (M_p^o,SB,m_1)

Diagrama finală se obţine prin suprapunere de efecte după cum urmează:

$M_{12} = -2 \cdot 22{,}64 = -44{,}68$

$M_{32} = 45 + 2{,}67(-3{,}35) = 36{,}05$

$M_{43} = 2 \cdot (-3{,}35) - 1 \cdot 22{,}64 = 29{,}34$

Diagrama finală este prezentată în figura 3.19.e.

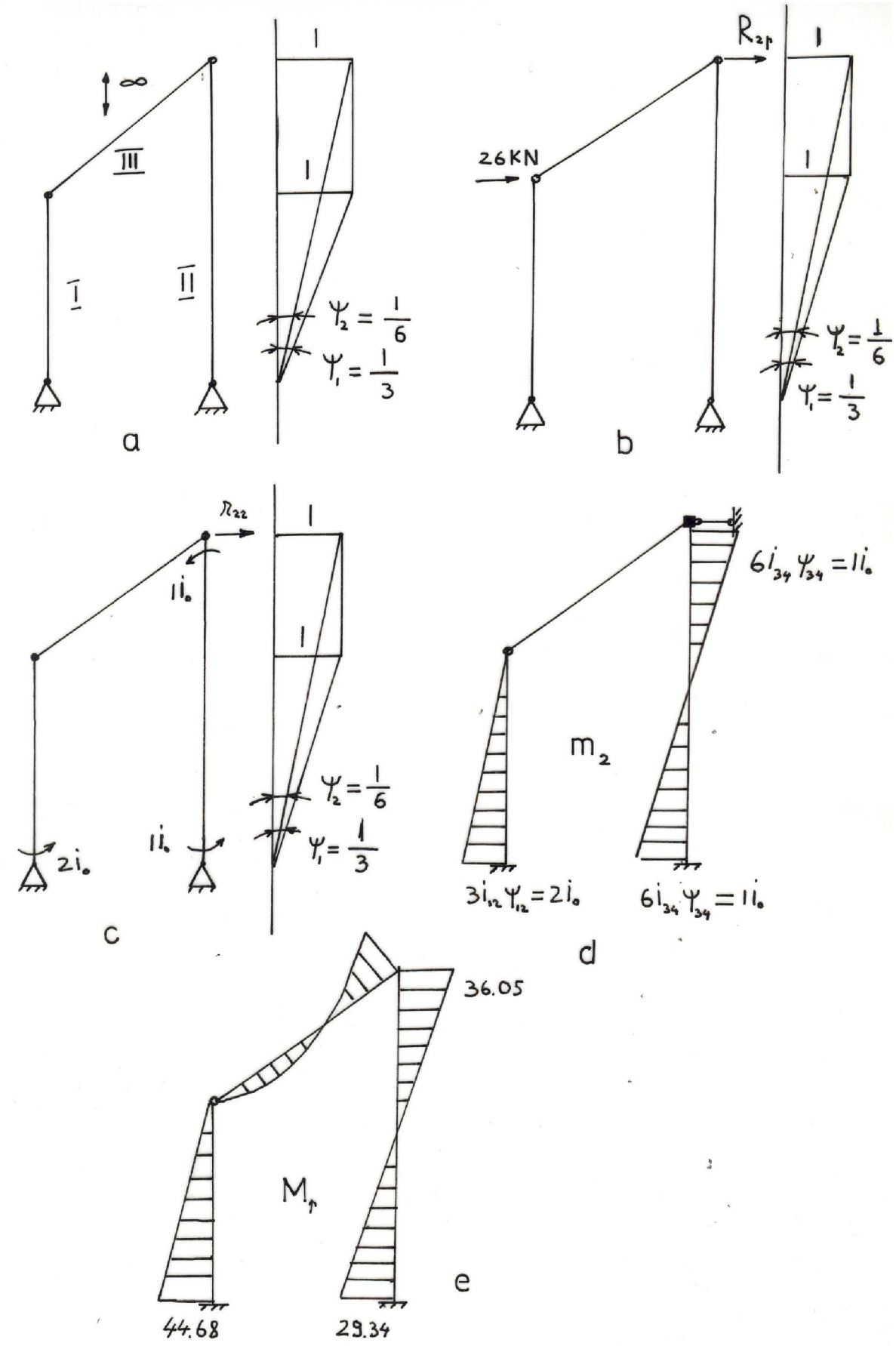


Fig.3.20 Exemplu structură cu noduri deplasabile

Exemplul 3.8: Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 3.21a.

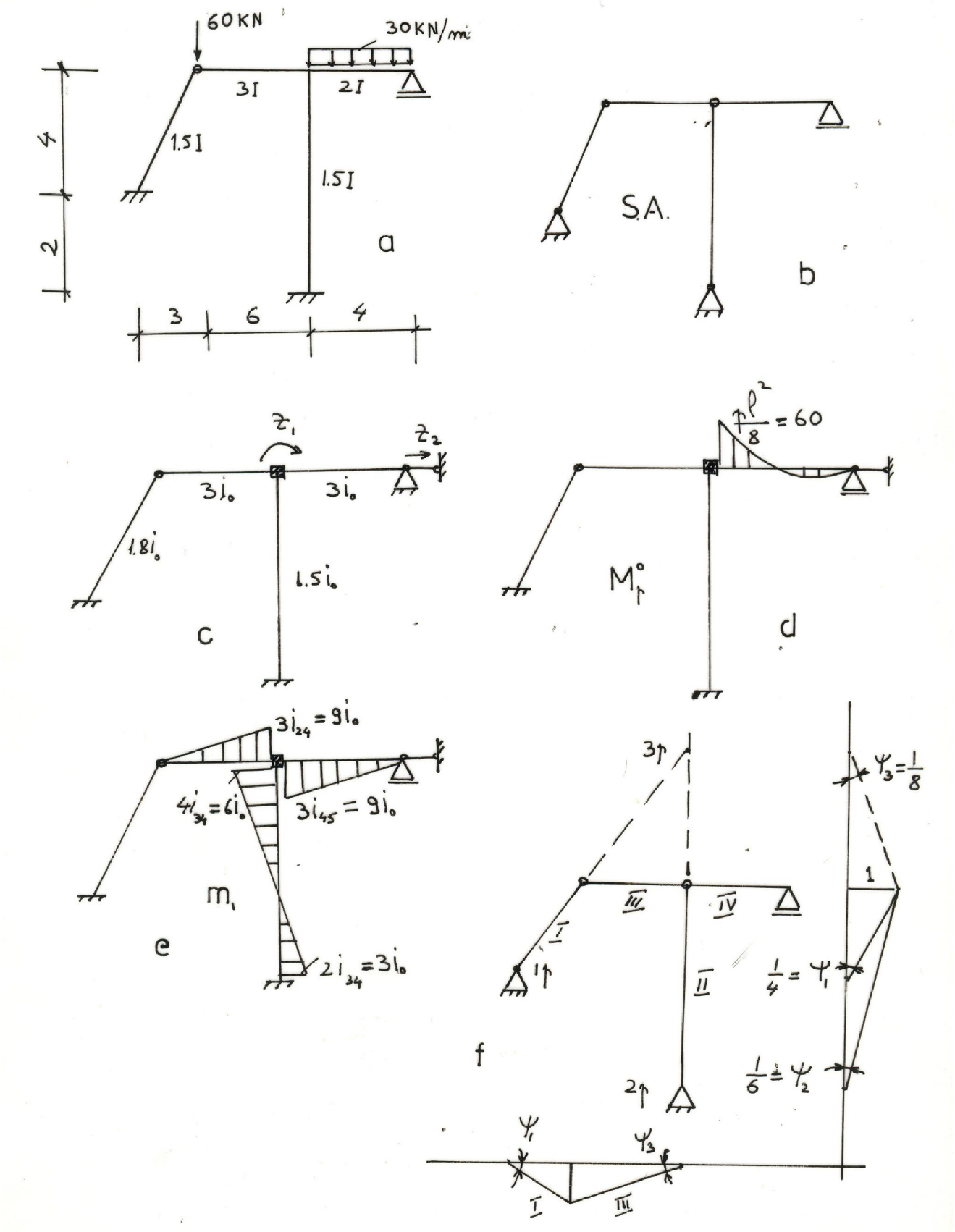


Figura 3.21 Structură iniţială. Diagramă M_p^o şi diagrama unitară m_1

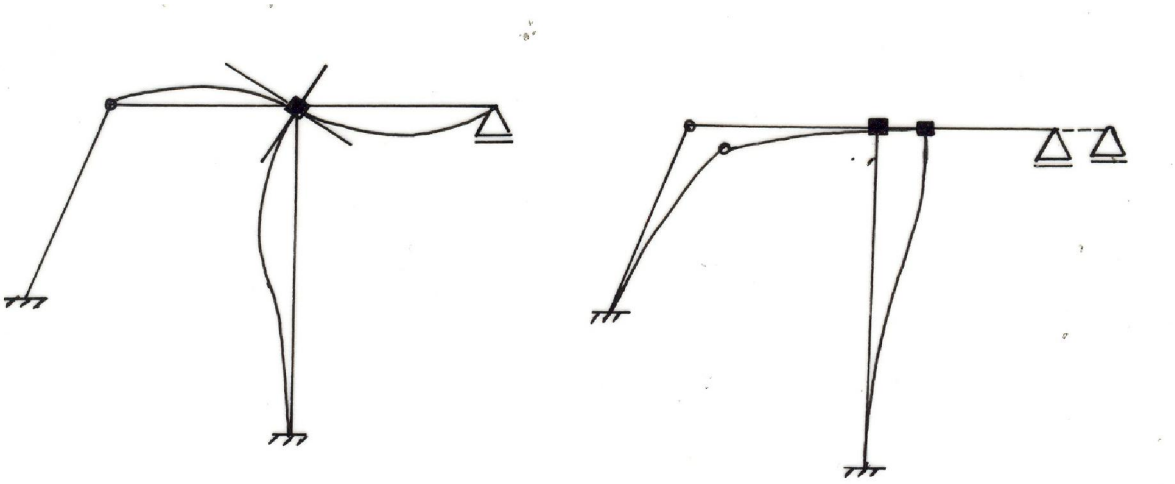


Fig.3.22 Forme deformate din acţiunea cu deplasări unitare (rotire de nod şi deplasare pe direcţia gradului de libertate elastică)

Calculul începe cu determinarea numărului gradelor de libertate cinematică cu relaţia: $W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$ se obţine astfel că avem de-a face cu o structură cu noduri deplasabile. Ulterior se determină rigidităţile practice plecînd de la $i_o = \frac{EI}{6}$.

$$i_{45} = \frac{2EI}{4} \cdot \frac{6}{6} = 3i_o \quad i_{12} = \frac{1{,}5EI}{5} \frac{6}{6} = 1{,}8i_o$$

Sistemul de bază se obţine blocînd rotirea nodului rigid şi translaţia pe direcţia gradului de libertate elastică, acesta fiind prezentat în figura 3.21c.

Diagrama M_p^o se obţine încărcînd sistemul de bază cu sarcinile exterioare, diagrama fiind prezentată în figura 3.21d. Diagrama m_1 prezentată în figura 3.21e se obţine prin rotirea unitară a nodului rigid. Pentru obţinerea diagramei m_2 se trasează diagrama de deplasări virtuale conform figurii 3.23a.

Termenii r_{22} şi R_{2p} se obţin folosind principiul lucrului mecanic virtual conform figurilor 3.23b,c, iar coeficienţii r_{11} şi r_{12} prin izolare de nod.

În final se rezolvă sistemul de ecuaţii care are forma:

$$2{,}4Z_1 - 0{,}38Z_2 - 60 = 0$$

$$-0{,}38Z_1 + 0{,}97Z_2 - 45 = 0$$

$$Z_1 = 3{,}25$$

$$Z_2 = 47{,}66$$

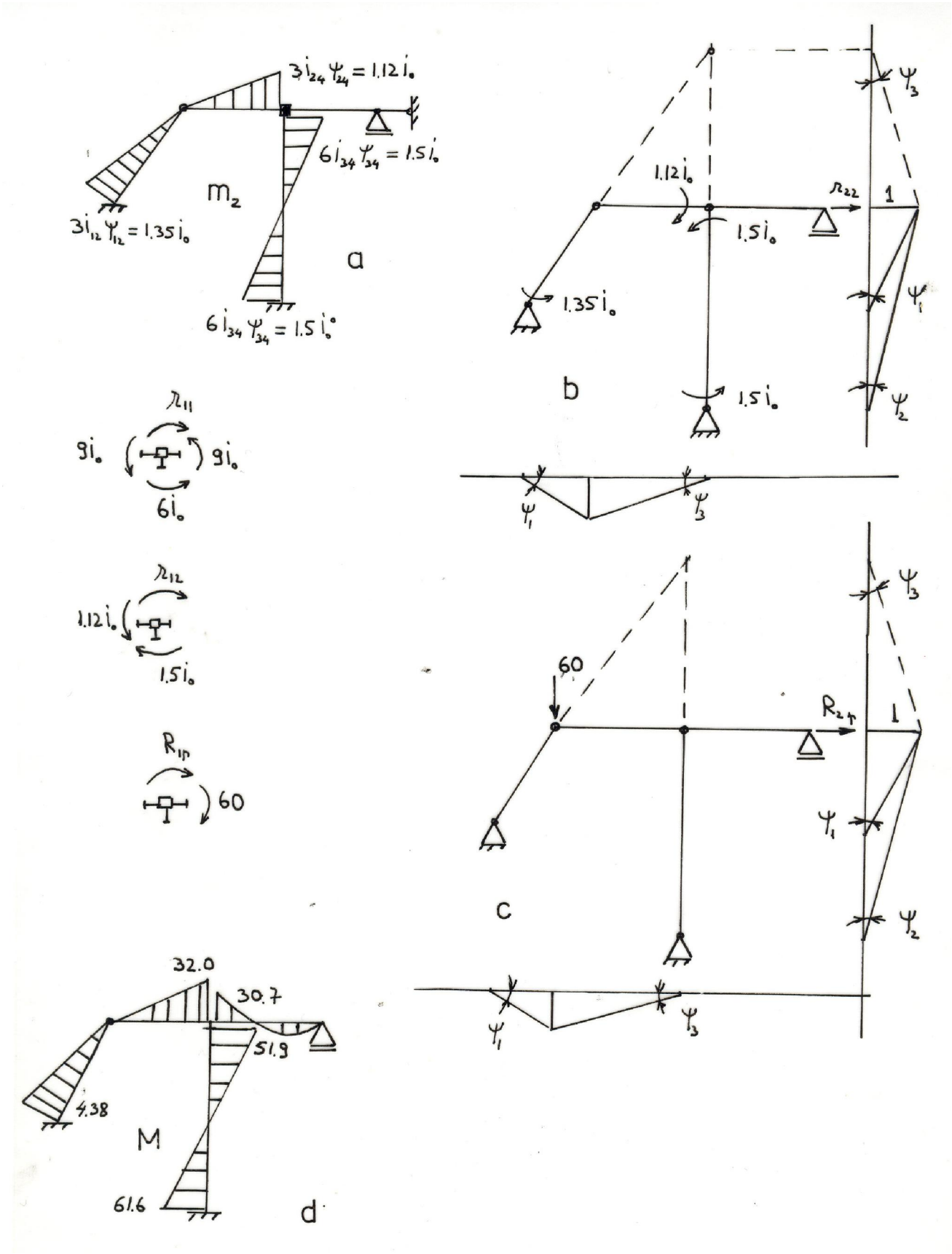


Figura 3.23 Diagrama unitară m_2 , diagramă finală de moment

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte şi este prezentată în 3.23d.

$M_{12} = -1{,}35 \cdot 3{,}25 = -4{,}38$

$M_{42} = 9 \cdot 3{,}25 + 1{,}12 \cdot 47{,}6 = 82{,}5$

$M_{45} = -60 + 9 \cdot 3{,}25 = -30{,}7$

$M_{43} = 6 \cdot 3{,}25 - 1{,}5 \cdot 47{,}6 = -51{,}9$

$M_{34} = 3 \cdot 3{,}25 - 1{,}5 \cdot 47{,}6 = -61{,}6$

3.9 Structuri simetrice

Şi în cazul metodei deplasărilor ca şi în cazul metodei eforturilor rezolvarea structurilor simetrice poate fi simplificată prin utilizarea procedeului semistructurilor şi a procedeului grupării necunoscutelor.

3.9.1 Procedeul semistructurilor

În cazul procedeului semistructurilor se folosesc semistructurile prezentate la metoda eforturilor. Acestea diferă funcţie de tipul de încărcare (încărcare simetrică sau antisimetrică) şi de tipul structurii. Deci la utilizarea acestui procedeu întîi se formează semistructura apoi se identifică tipul structurii şi se formează sistemul de bază.

Calculul se conduce pe semistructură iar în final diagrama de moment pe întreaga structură se obţine plecînd de la diagrama de moment a semistructurii ţinînd cont de faptul că pentru o încărcare simetrică diagrama finală de moment este simetrică iar la o încărcare antisimetrică diagrama finală de moment este antisimetrică.

Pentru cadrul din fig.3.24a, al cărui sistem de bază este arătat în fig. 3.24b, rezultă un număr de opt necunoscute, dintre care cinci rotiri de nod şi trei grade de libertate. Rotirile Z_6 şi Z_8 ale stîlpilor laterali se pot grupa într-o pereche de rotiri simetrice şi o pereche de rotiri antisimetrice (fig.3.24 c şi e)

În cazul cadrelor cu stîlp central, în cazul încărcărilor simetrice, nodurile de pe axa de simetrie nu se pot roti şi nici nu pot avea translaţii pe orizontală. În consecinţă stîlpul central nu se deformează. În aceste noduri se pot considera încastrări perfecte. Semistructura este prezentată în figura 3.24e iar cu linie punctată este arătată rotirea barelor.

Pentru încărcări antisimetrice, nodurile de pe axa de simetrie suferă rotiri şi translaţii pe orizontală, şi deci stîlpul central se deformează şi deci trebuie să figureze în semistructură cu rigiditatea redusă la jumătate.

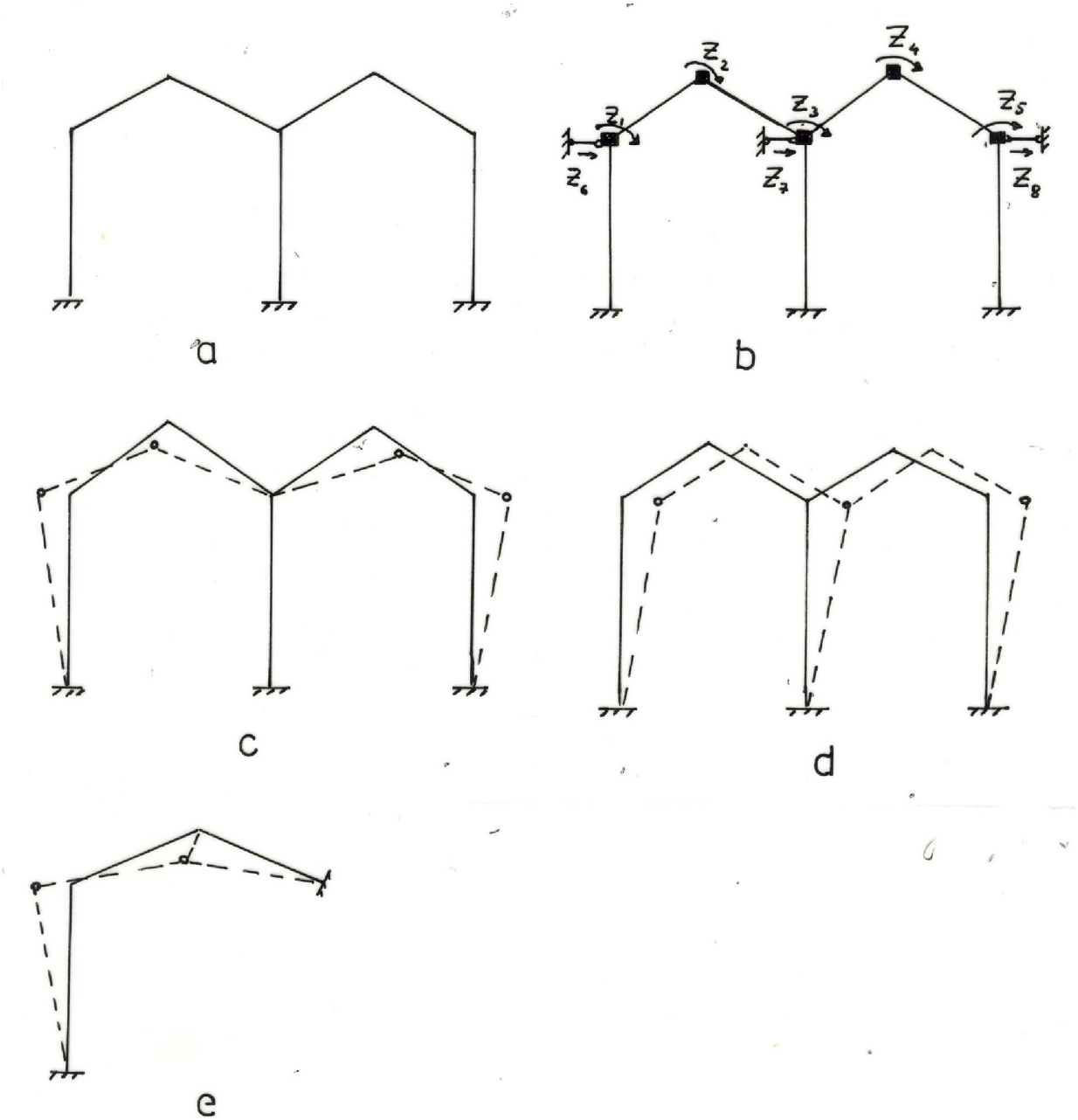


Fig.3.24 Procedeul semistructurilor. Utilizarea simetriei şi antisimetriei

Este recomandabil ca rigidităţile practice să fie calculate pe întreaga structură.

3.9.2 Procedeul grupării necunoscutelor

Pentru trasarea diagramelor unitare din încărcarea cu grupări de necunoscute simetrice sau antisimetrice este necesar să se cunoască modul de comportare al barei dublu încastrată încărcată cu rotiri simetrice sau antisimetrice

Pentru încărcarea simetrică (fig.3.25a) se încarcă pe rînd nodurile i şi j apoi se suprapun efectele. Similar se procedează şi în cazul încărcării antisimetrice.

În cazul încărcării simetrice diagrama de moment încovoietor rezultă constantă, iar valoarea este 2iθ, deci în capătul rotit valoarea rezultă pe jumătate din aceea obţinută pentru rotirea simplă. Acelaşi rezultat se obţine dacă se ţine seama că $\theta_i=-\theta_j$

$$M_{ij} = m_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j = m_{ij} - 2i_{ij}\theta_i$$

Deformata este simetrică cu tangenta zero în secţiunea de la mijlocul deschiderii.

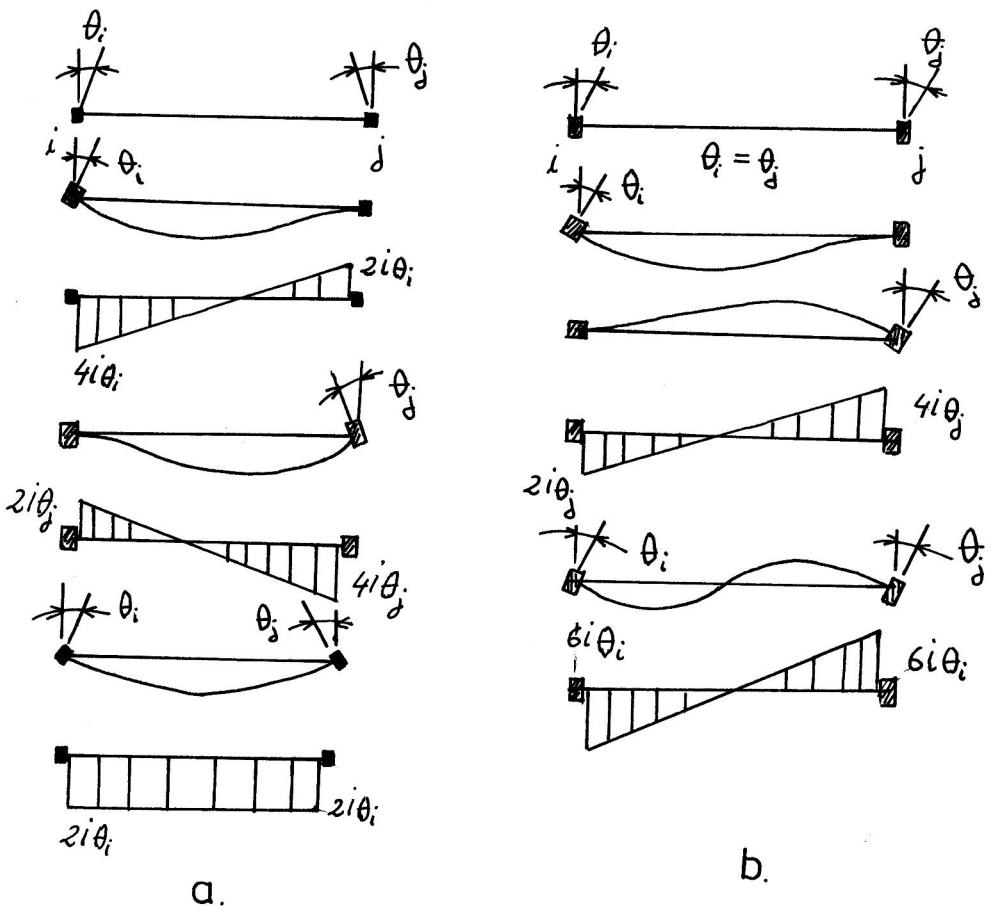


Fig.3.25 Bara dublu încastrată încărcată cu încărcări simetrice (a) şi antisimetrice (b)

În cazul încărcării antisimetrice diagrama de moment încovoietor rezultă cu variaţie liniară, punctul de anulare fiind la mijlocul deschiderii (condiţie de antisimetrie). Valoarea momentului încovoietor la capete este $6i\theta_i$, deci, odată şi jumătate mai mare decît valoarea rezultată pentru rotirea simplă. Acelaşi rezultat se obţine dacă se ţine seama că $\theta_i = \theta_j$:

$$M_{ij} = m_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j = m_{ij} - 6i_{ij}$$

Se reaminteşte faptul că prin utilizarea proprietăţilor de simetrie ale structurii sistemul general de ecuaţii se desface în două sisteme, unul care conţine numai necunoscutele simetrice şi altul care conţine numai necunoscutele antisimetrice.

În funcţie de natura încărcărilor se obţine o nouă reducere a timpului de lucru prin aceea că dacă încărcarea este simetrică se rezolvă numai sistemul de ecuaţii ce conţine necunoscutele simetrice, iar dacă încărcarea este antisimetrică se rezolvă numai sistemul de ecuaţii ce conţine necunoscutele antisimetrice.

În acest procedeu se operează pe structura întreagă grupînd necunoscutele simple în necunoscute grupate simetric şi necunoscute grupate antisimetric. În funcţie de încărcarea exterioară -simetrică sau antisimetrică- se rezolvă numai gruparea simetrică sau numai gruparea antisimetrică şi aceasta deoarece la încărcarea simetrică necunoscutele antisimetrice sînt egale cu zero şi invers la încărcarea antisimetrică necunoscutele simetrice sînt egale cu zero.

Pentru exemplificarea modului în care se grupează necunoscutele se consideră structura din fig.3.26

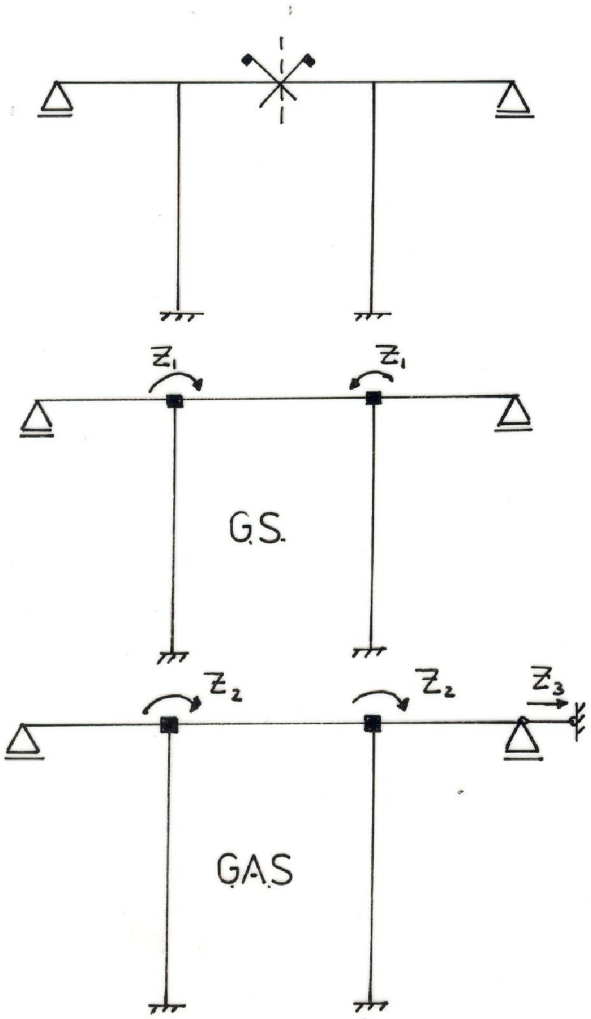


Fig.3.26 Modul de grupare a necunoscutelor simetrice şi antisimetrice

Rotirile nodurilor rigide simetrice se pot grupa în rotiri grupate simetric şi rotiri grupate antisimetric. Translaţiile pe direcţiile gradelor de libertate sînt deplasări simple, ele nu se pot grupa.

Rezultă că în cazul grupării simetrice va fi o singură necunoscută iar în cazul grupării antisimetrice vor fi două necunoscute.

Pentru structura din fig.3.27 care are tot două grade de libertate, acestea se pot grupa ca şi rotirile nodurilor rigide cu excepţia rotirii nodului de pe axa de simetrie, care va rămîne o rotire simplă dar antisimetrică.

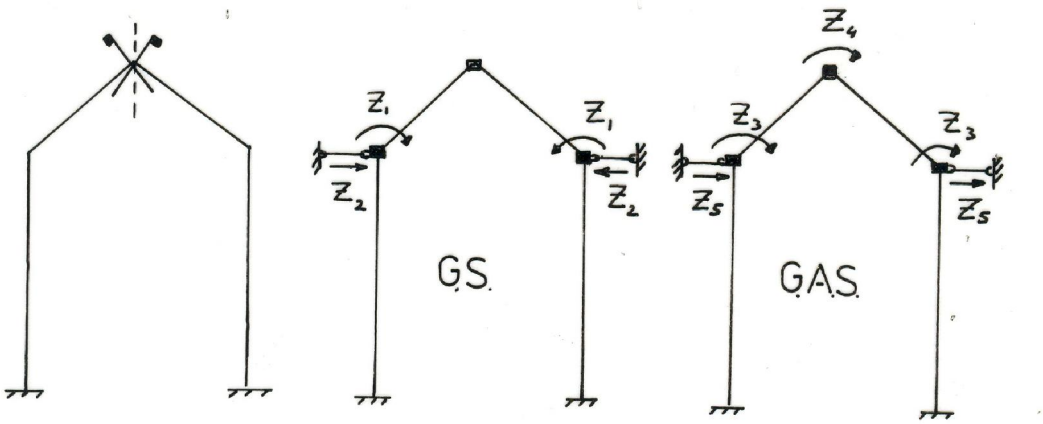


Fig.3.27 Exemplu grupare necunoscute simetrică şi antisimetrică

În fig.3.28 se prezintă un tabel centralizator cu valorile momentelor şi forţelor tăietoare pentru barele tip încărcate cu rotiri de nod sau rotiri de bară.

3.10 Comparaţie între metoda eforturilor şi metoda deplasărilor

Din expunerea metodei eforturilor şi a metodei deplasărilor se pot scoate în evidenţă o serie de elemente caracteristice:

1) Prin definiţie, necunoscutele metodei eforturilor sînt eforturile X_j, forţe şi cuple, iar în metoda deplasărilor necunoscutele sînt deplasările Z_j rotiri de noduri şi de bare.

2) Ambele metode conduc la sisteme liniare de ecuaţii, care sub forma clasică sînt simetrice faţă de diagonala principală .

3) În metoda eforturilor coeficientul δ_{ij} reprezintă deplasarea din încărcarea unitară şi Δ_{i0} deplasarea din încărcarea exterioară pe forma de bază static determinată, pe cînd în metoda deplasărilor coeficienţii r_{ij} reprezintă eforturi din deplasarea unitară, iar R_{ip} eforturi din încărcarea exterioară, pe forma de bază cu nodurile perfect încastrate. Toţi aceşti coeficienţi pot fi interpretaţi şi ca termeni de lucru mecanic virtual. Dar δ_{ij} ,Δ_{i0} reprezintă lucrul mecanic virtual produs de forţa virtuală $X_i=1$ adică lucrul mecanic virtual în varianta forţelor virtuale, pe cînd r_{ij} ,R_{i0} reprezintă lucrul mecanic virtual produs de deplasarea virtuală $Z_i=1$ adică lucrul mecanic virtual în varianta directă a deplasărilor cinematice virtuale.

4) În metoda eforturilor ecuaţiile se obţin din condiţii de continuitate (anularea unor deplasări) pe cînd în metoda deplasărilor ecuaţiile se obţin din condiţii de echilibru static (anularea unor eforturi). Ambele categorii de ecuaţii pot fi interpretate ca ecuaţii decurgînd din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual: în metoda eforturilor ecuaţiile se obţin din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în varianta forţelor viurtuale, pe cînd în metoda deplasărilor ecuaţiile se obţin din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în varianta deplasărilor cinematice virtuale (ceea ce este echivalent cu condiţiile de echilibru static).

5) Metoda eforturilor este foarte generală şi se aplică la orice gen de structuri în acelaşi mod. Se poate ţine seama de deformaţiile produse de toate eforturile (momente,forţe axiale etc.) fără să se introducă în general necunoscute suplimentare. Metoda deplasărilor fiind o metodă indirectă, are zona de aplicabilitate limitată la structurile pentru care au fost pregătite formulele de exprimare a eforturilor în funcţie de deplasări. Aşa cum a fost dezvoltată aici, metoda se aplică numai la cadrele din bare drepte, la care s-a neglijat deformaţia produsă de forţele axiale, ar trebui introduse necunoscute suplimentare cu care s-ar opera destul de dificil. Deci din acest punct de vedere metoda eforturilor este mai generală şi mai exactă.

6) In metoda eforturilor forma de bază rezultă prin suprimarea de legături pînă cînd sistemul devine static determinat şi în consecinţă numărul necunoscutelor X_j este egal cu gradul de determinare statică.

În metoda deplasărilor forma de bază se obţine prin adaos de legături astfel încît să se obţină sisteme cu noduri încastrate perfect şi nedeplasabile, de aceea numărul necunoscutelor Z_j nu este legat direct de gradul de nedeterminare statică al sistemului.

În general la cadre şi în special la cadre cu noduri fixe, metoda deplasărilor conduce la mai puţine ecuaţii decît metoda eforturilor.

7) Metoda deplasărilor prezintă însă un avantaj categoric faţă de metoda eforturilor în ceea ce priveşte modul de determinare al coeficienţilor necunoscutelor. Determinarea coeficienţilor δ_{ij} în metoda eforturilor necesită construirea diagramelor m_i,m_j şi apoi realizarea integrărilor. La barele drepte aceste integrări sînt sistematizate prin regula Vereşceaghin, totuşi coeficienţii δ_{ij} şi Δ_{io} se determină anevoios, mai ales că necesită diagramele m_i,m_j care în practică constituie o sursă de erori. Numai în puţine cazuri (de

exemplu la grinzi continue) se poate sistematiza calculul acestor coeficienţi fără construirea diagramelor m_i, m_j.

În metoda deplasărilor însă coeficienţii r_{ij} se pot determina mult mai uşor din simplele caracteristici ale barelor şi ale cinematicei sistemelor articulate. În special la cadre cu noduri fixe unde nu este nevoie nici de cinematica sistemelor de bare coeficienţii r_{ij} se scriu automat. De aceea în practică metoda deplasărilor este preferată chiar la sistemele la care conduce la un număr mai mare de ecuaţii decît metoda eforturilor.

8) Metoda eforturilor determină direct eforturile ce servesc pentru dimensionarea barelor, pe cînd metoda deplasărilor, după determinarea necunoscutelor Z_i, urmează o altă fază şi anume trecerea de la deplasări la eforturi cu ajutorul unor expresii analitice fundamentale ceea ce constituie operaţii suplimentare.

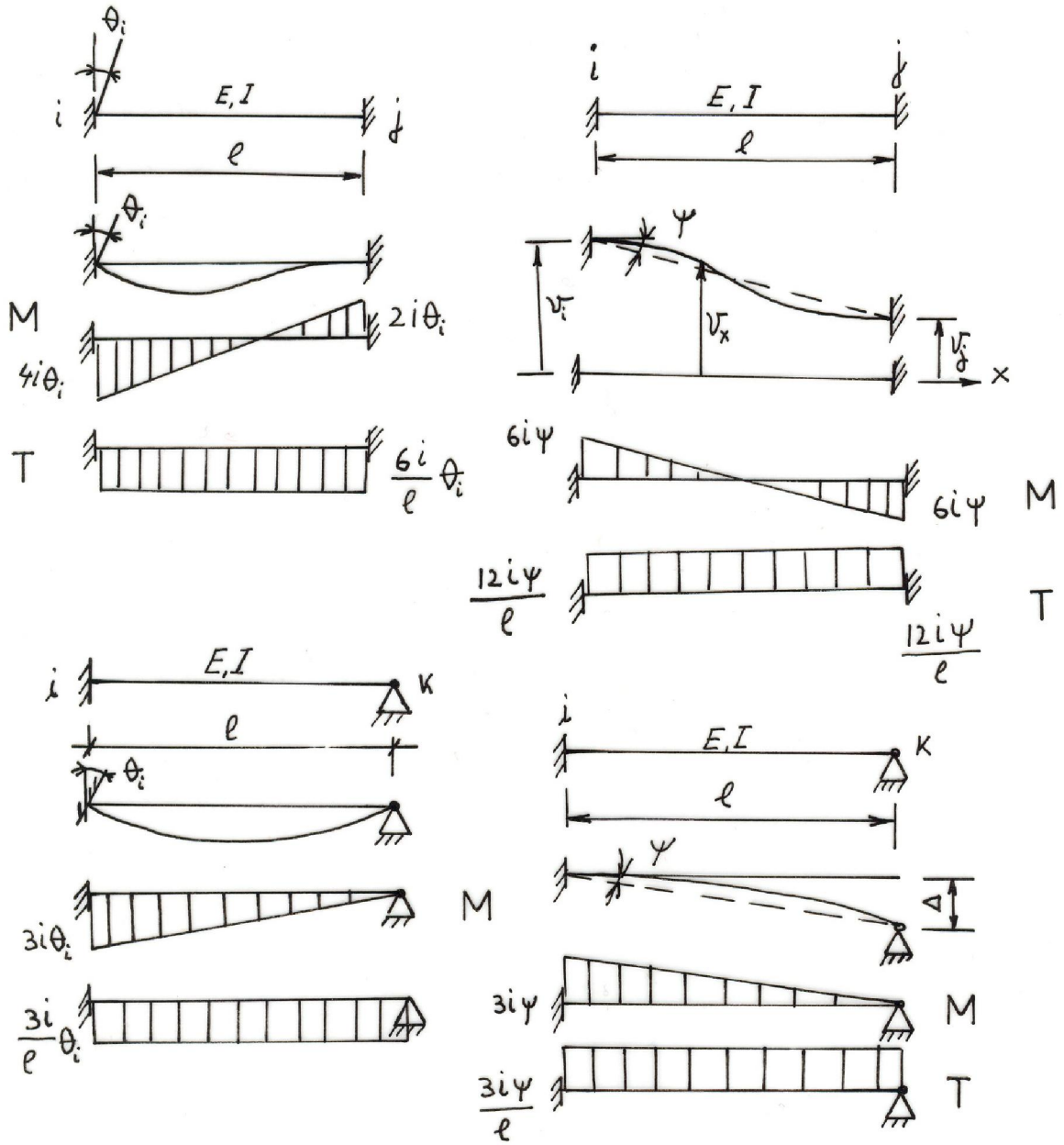


Fig.3.28 Tabel centralizator cu valorile momentelor şi forţelor tăietoare pentru barele tip încărcate cu rotiri de nod şi rotiri de bară

CAP.4 CALCULUL STRUCTURILOR LA ACŢIUNEA VARIAŢIILOR DE TEMPERATURĂ ŞI A CEDĂRILOR DE REAZEME.

Acest tip de încărcări au următoarele efecte asupra structurilor static determinate sau static nedeterminate:
-la structurile static determinate aceste încărcări nu produc eforturi, ci numai modificarea configuraţiei geometrice a structurii, ca urmare a numărului minim de legături existente.
-la structurile static nedeterminate aceste încărcări produc atît eforturi cît şi modificarea configuraţiei geometrice, ca urmare a surplusului de legături. În aceste situaţii de încărcare, comparativ cu cazul încărcării cu forţe, eforturile depind de natura materialului şi de mărimea momentelor de inerţie (de produsul EI).

4.1 Acţiunea variaţiei de temperatură

Variaţia de temperatură faţă de temperatura de realizare a unei structuri produce o modificare a formei structurii şi lungimii barelor. La structurile static determinate, această modificare se poate face nestînjenit şi deci nu apar eforturi în structură.

4.1.1 Structuri static determinate

În cazul acestor elemente sau structuri de rezistenţă deformarea sub acţiunea variaţiei de temperatură este liberă.

De exemplu dacă grinda simplu rezemată din fig. 4.1a este supusă unei creşteri uniforme de temperatură, se lungeşte cu Δl_t.

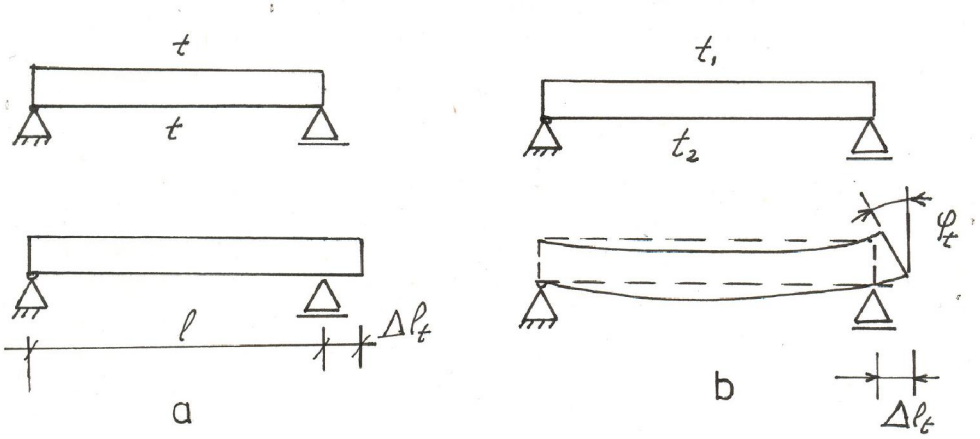


Fig.4.1 Prezentarea efectului variaţiei de temperatură pentru o grindă dreaptă; a) creştere de temperatură cu aceaşi valoare pe ambele feţe; b) creştere de temperatură cu valori diferite între cele două feţe

În cazul unei creşteri de temperatură diferită pe cele două feţe ale elementului (fig.4.1b), bara respectivă se şi lungeşte dar se şi încovoaie.

Pentru evaluarea acestor deplasări se consideră un element de lungime dx dintr-o bară cu înălţimea h şi supusă temperaturilor t_1 şi t_2 la cele două fibre extreme (fig.4.2).

Temperaturile t_1 şi t_2 sînt de fapt diferenţele de temperatură între temperatura iniţială şi cea finală.

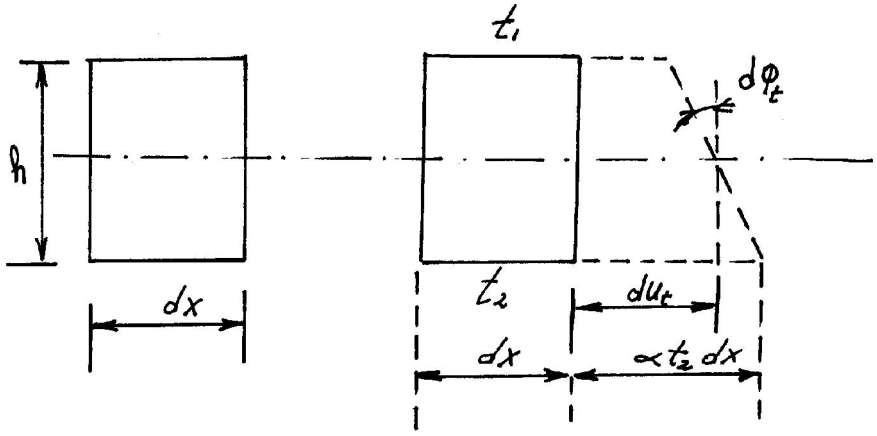


Fig.4.2 Efectul variaţiei de temperatură pentru un element de lungime dx

Se consideră că are loc o creştere a temperaturii şi că $t_2 > t_1$. Se notează: $t_m = \frac{t_2 + t_1}{2}$ şi poartă numele de temperatură medie şi $\Delta t = t_2 - t_1$ şi poartă numele de diferenţă de temperatură. Datorită temperaturii t_1 fibra superioară se lungeşte cu $\alpha t_1 dx$,iar fibra inferioară, sub acţiunea temperaturii t_2, se lungeşte cu $\alpha t_2 dx$.

Dacă se consideră că secţiunea din stînga este fixă, urmează că secţiunea din dreapta să se translateaze cu du_t şi să se rotească cu $d\varphi_t$. Din fig. 4.2 rezultă expresiile acestor deplasări:

$$(4.2)\,\mathrm{K}\; du_t = \frac{1}{2}(\alpha t_1 dx + \alpha t_2 dx) = \alpha t_m dx$$

$$(4.3)\,\mathrm{K}\; d\varphi_t = \frac{1}{h}(\alpha t_2 dx - \alpha t_1 dx) = \frac{1}{h}\alpha \Delta t dx$$

Se consideră că variaţia de temperatură se manifestă simultan cu o stare de eforturi M_i N_i T_i , determinată de, un sistem de forţe P_i, atunci va fi produs lucru mecanic atît de eforturi cît şi de forţele P_i, parcurgînd deplasările produse de variaţia de temperatură.

Notînd cu Δ_{it} deplasările pe direcţiile forţelor P_i lucrul mecanic exterior şi al eforturilor este:

$$(4.4)\,\mathrm{K}\; L_{ex} = \sum P_i \Delta_{it}$$

$$(4.5)\,\mathrm{K}\; L_{ef} = \int N_i du_t + \int M_i d\phi_t$$

astfel că lucrul mecanic total va avea forma:

$$(4.6)\,\mathrm{K}\; L_{tot} = \sum P_i \Delta_{it} - \int N_i du_t - \int M_i d\phi_t$$

Ţinînd cont de faptul că $L_{tot} = 0$ va rezulta:

$$(4.7)\,\mathrm{K}\; \sum P_i \Delta_{it} = \int N_i du_t + \int M_i d\phi_t$$

Dacă se consideră că asupra structurii acţionează o singură forţă egală cu unitatea $P_i = 1$ care va produce eforturile n_i şi m_i atunci relaţia (4.7) poate fi utilizată în calculul deplasărilor secţionale produse de variaţia de temperatură.

Cu aceste elemente relaţia (4.7) devine:

$$(4.8)\,\mathrm{K}\; \Delta_{it} = \int n_i du_t + \int m_i d\phi_t$$

sau ţinînd seama de (4.2) şi (4.3) rezultă forma curentă a deplasării produse de variaţia de temperatură:

$$(4.9)\,\mathrm{K}\; \Delta_{it} = \alpha \int n_i t_m dx + \alpha \int m_i \frac{\Delta t}{h} dx$$

Expresia (4.9) este aplicabilă numai pentru structuri static determinate.

Ea capătă o formă mai simplă dacă structura este alcătuită din bare cu secţiune constantă la care variaţia de temperatură este aceeaşi pe lungimea unei bare. În acest caz rezultă:

$$(4.10)\ \mathrm{K}\Delta_{it} = \sum \alpha t_m \int n dx + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \int m dx$$

Integralele de forma $\int ndx$ şi $\int mdx$ reprezintă ariile diagramelor de eforturi pe barele respective.

Exemplul 4.2: Să se determine deplasarea pe verticală şi pe orizontală a articulaţiei centrale pentru structura static determinată din figura 4.3.

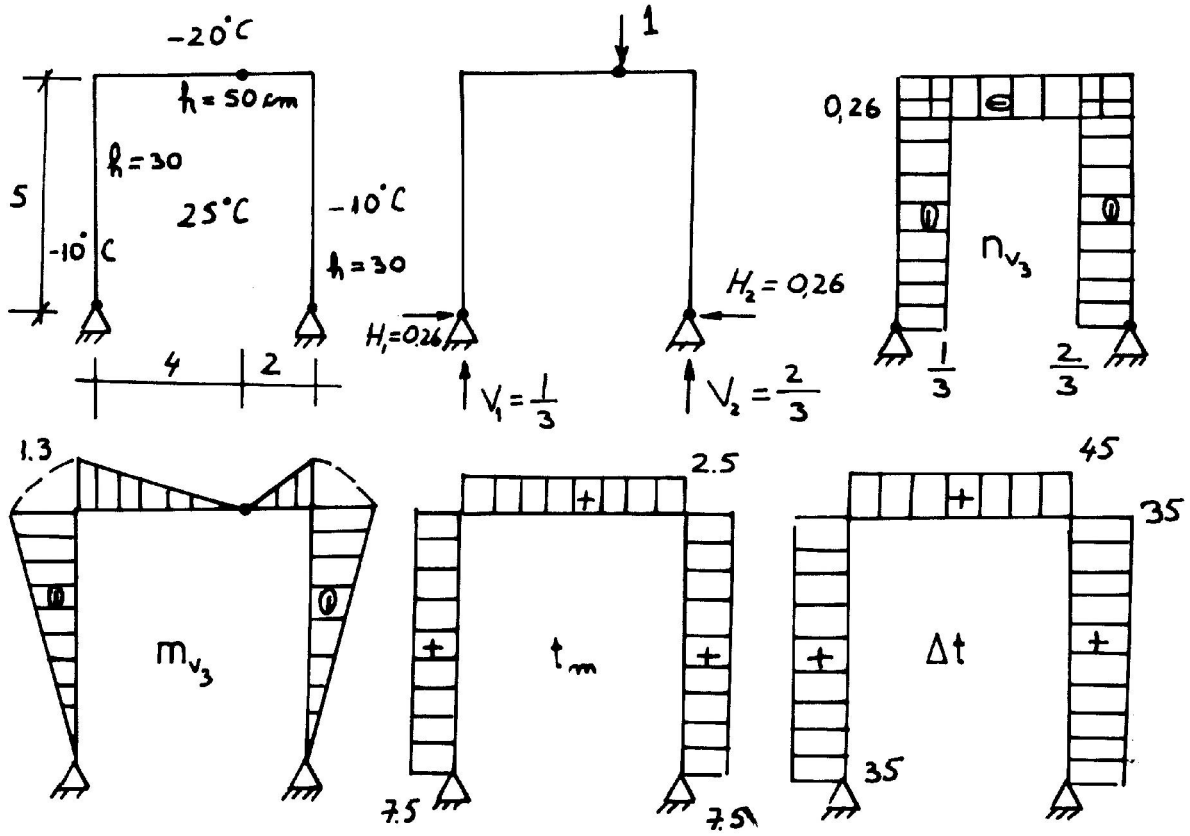


Figura 4.3 Determinarea deplasării unei secţiuni ca urmare a acţiunii variaţiei de temperatură

Pentru determinarea deplasării pe verticală a articulaţiei centrale, se acţionează cu o forţă concentrată pe direcţia deplasării căutate.

Relaţia generală are forma:

$$\Delta = \int \alpha t_m n_i \cdot dx + \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_i dx$$

Reacţiunile din acţiunea forţei unitate se determină cu relaţiile:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow \frac{1}{3} 4 - H_1 \cdot 5 = 0 \rightarrow H_1 = \frac{4}{15} = 0{,}26$$

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2};\ \Delta t = t_2 - t_1$$

$$v_3 = -\alpha\left(\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 7{,}5 + 0{,}26 \cdot 6 \cdot 2{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 7{,}5\right) - \alpha\left(\frac{1}{0{,}3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \cdot 5 \cdot 35 + \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \cdot 2 \cdot 45 + \frac{1}{0{,}3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}3 \cdot 5 \cdot 35\right)$$

$v_3 = -1150{,}7\alpha \;\; ; \alpha = 1 \cdot 10^{-5}$

$v_3 = 0{,}011m$

Partea a doua a aplicaţiei o reprezintă calculul deplasării pe orizontală a articulaţiei centrale ca urmare a acţiunii variaţiei de temperatură (figura 4.4).

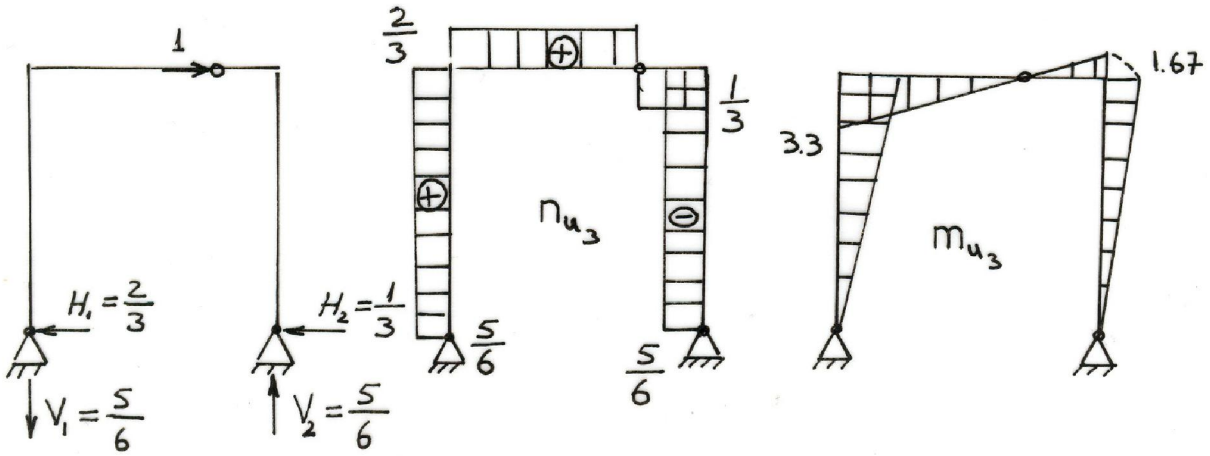


Figura 4.4 Calculul deplasării pe orizontală din variaţie de temperatură

Calculul reacţiunilor din acţiunea forţei unitate:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{5}{6}$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -\frac{5}{6} \cdot 4 + H_1 \cdot 5 = 0 \rightarrow H_1 = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \alpha\left(\frac{5}{6} \cdot 5 \cdot 7{,}5 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2{,}5 - \frac{5}{6} \cdot 5 \cdot 7{,}5\right) +$$

$$\alpha\left(\frac{1}{0{,}3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}33 \cdot 5 \cdot 35 + \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}33 \cdot 4 \cdot 45 - \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 2 \cdot 45 - \frac{1}{0{,}3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 5 \cdot 35\right)$$

$$u_3 = 938\alpha$$

4.1.2. Aplicarea metodei eforturilor pentru structuri încărcate cu variaţie de temperatură

Calculul structurilor static nedeterminate încărcate cu variaţie de temperatură se poate realiza şi prin metoda eforturilor. Prima etapă constă în stabilirea gradului de nedeterminare statică şi formarea sistemului de bază. În cazul de faţă nu există o diagramă $M_{\Delta t}{}^0$ deoarece sistemul de bază este static determinat, iar încărcarea sistemului de bază cu variaţie de temperatură nu produce eforturi.

Diagramele unitare şi coeficienţii δ_{ij} se calculează la fel ca în cazul încărcării cu forţe. Aceşti coeficienţi δ_{ij} pot fi folosiţi pentru calculul unei structuri încărcată cu forţe, variaţie de temperatură sau cedări de reazeme. Ceea ce diferă de la o încărcare la alta sînt termenii liberi Δ_{ip}.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie al metodei eforturilor, în cazul încărcării structurii cu variaţia de temperatură capătă forma:

$$(4.11)\ \mathrm{K}\ \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\ldots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1t}=0$$

...

$$\mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \delta_{i1}X_1+\delta_{i2}X_2+\ldots.+\delta_{in}X_n+\Delta_{it}=0$$

$$\mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\ldots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nt}=0$$

unde termenul liber are expresia:

$$(4.12)\ \mathrm{K}\ \Delta_{it}=\alpha\int n_i t_m dx+\alpha\int m_i\frac{\Delta t}{h}dx$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se obţin necunoscutele cu care se determină momentul încovoietor în orice secţiune cu relaţia:

$$(4.13)\ \mathrm{K}\ M_t=m_1X_1+m_2X_2+\ldots+m_nX_n$$

ceea ce reprezintă efectul nedeterminării statice.

Deplasările din încărcarea cu variaţie de temperatură pe sistemul static nedeterminat se pot obţine calculînd termenii respectivi din expresia generală a deplasărilor:

$$(4.14)\ \mathrm{K}\ \Delta_i=\int n_i\alpha t_m dx+\int m_i\alpha\frac{\Delta t}{h}dx$$

care prezintă însă inconvenientul că trebuie rezolvat sistemul static nedeterminat la încărcarea virtuală-unitară pentru a determina eforturile n_i şi m_i.

Se ajunge la o formă mai simplă de calcul plecînd de la suprapunerea efectelor pe sistemul de bază care trebuie să aibă aceleaşi deplasări ca sistemul real.

$$(4.15)\ \mathrm{K}\ \Delta_i=\Delta_{i0}{}^t+\Delta_{ix}$$

în care, $\Delta_{i0}{}^t$ este deplasarea respectivă pe sistemul de bază din variaţii de temperatură, Δ_{ix} este deplasarea respectivă pe sistemul de bază din necunoscutele date de variaţiile de temperatură. Folosind deplasările pe direcţia respectivă din necunoscute unitare, se poate scrie:

$$(4.16)\ \mathrm{K}\ \Delta_i=\Delta_{i0}{}^t+\delta_{i1}X_1+\delta_{i2}X_2+\ldots+\delta_{in}X_n=\Delta_{io}{}^t+\int\frac{m_i{}^0m_1}{EI}X_1dx+$$

$$+\int\frac{m_i{}^0m_2}{EI}X_2dx+\ldots+\int\frac{m_i{}^0m_n}{EI}X_ndx=$$

$$\Delta_{i0}{}^t+\int\frac{m_i{}^0(m_1X_1+m_2X_2+\ldots+m_nX_n)}{EI}dx$$

Rezultă că deplasările pe structuri static nedeterminate se pot calcula cu formula:

$$(4.17)\ \mathrm{K}\ \Delta_i=\int n_i{}^0\alpha t_0dx+\int m_i{}^0\alpha\frac{\Delta t}{h}dx+\int\frac{m_i{}^0M_t}{EI}dx+\int\frac{n_i{}^0N_t}{EA}dx+\int\eta\frac{t_i{}^0T_t}{GA}dx$$

expresia de mai sus conţinînd termenii datorită variaţiei de temperatură, momentului încovoietor, forţei axiale şi forţei tăietoare.

<u>Exemplul 4.2:</u> Să se traseze diagrama de moment pentru structura din figura 4.5 considerînd $EI=18000KNm^2$ şi $\alpha=1\cdot10^{-5}$

Gradul de nedeterminare statică se stabileşte cu relaţia: N=3C-A-2S=1

Calculul reacţiunilor:

$$1-V_1\cdot6=0\rightarrow V_1=\frac{1}{6}$$

$$\left(\sum M\right)_5^{st}=0\rightarrow-\frac{1}{6}\cdot3+1-H_1\cdot4=0\rightarrow H_1=\frac{1}{8}$$

Ecuaţia de condiţie are forma: $\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$

$$\delta_{11}=\int\frac{m_1^{\,2}}{EI}dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot1\right)+2\cdot\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2{,}92}{EI}$$

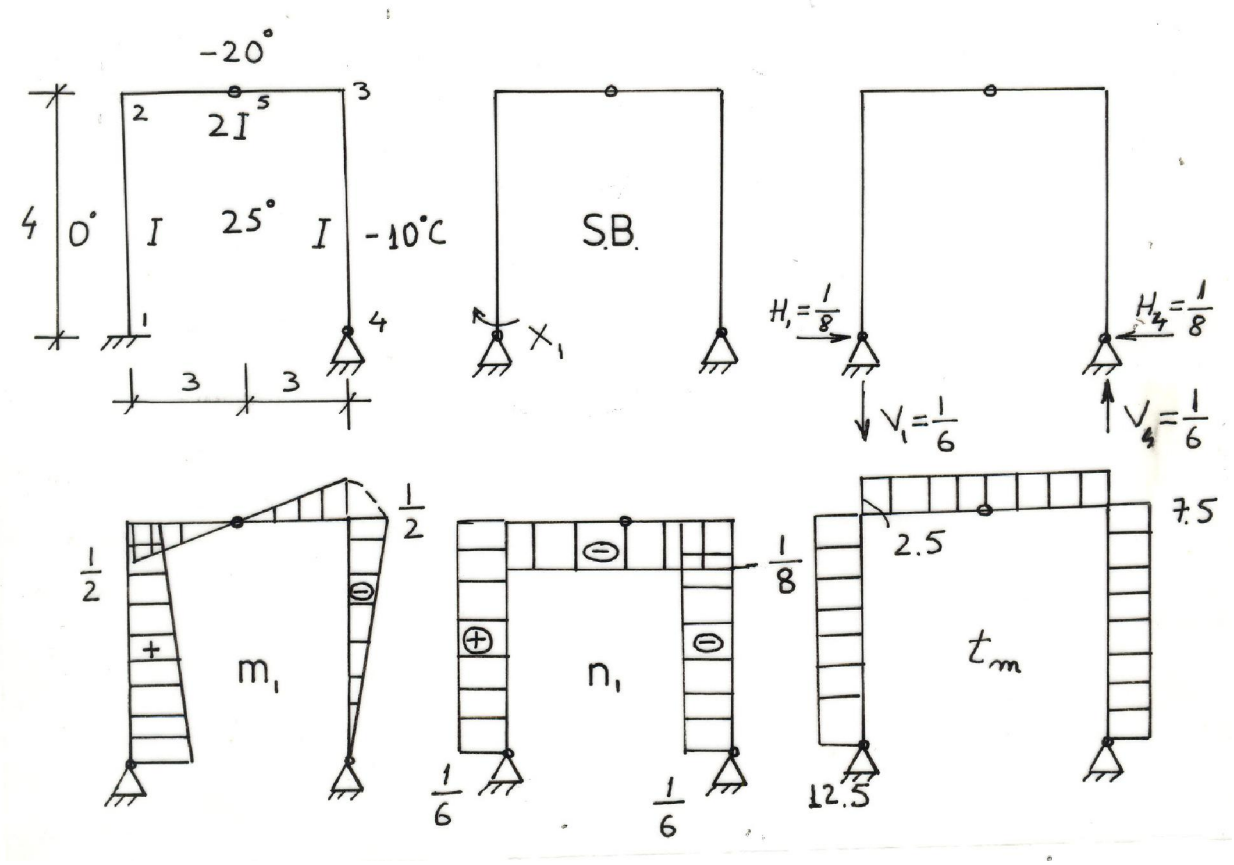


Figura 4.5 Structură static nedeterminată acţionată de variaţie de temperatură

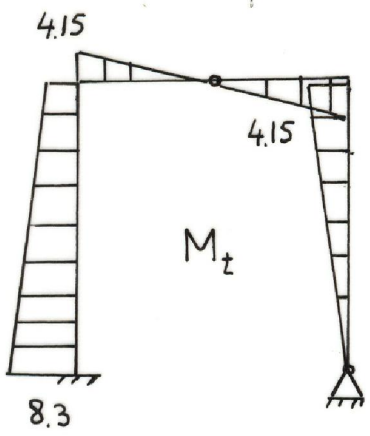


Fig.4.6 Diagramă finală de moment din acţiunea variaţiei de temperatură

$$\Delta_{1t}=\alpha\left(\frac{1}{6}\cdot4\cdot12{,}5-\frac{1}{8}\cdot6\cdot25-\frac{1}{6}\cdot4\cdot7{,}5\right)+$$

$$\frac{\alpha}{0{,}3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot25+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot25-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot35\right)$$

$$\Delta_{1t}=134{,}7\alpha$$

Astfel ecuaţia de condiţie devine: $\cdot\,2{,}92X_1+134{,}7\alpha\cdot EI=0$

$2{,}92X_1 + 24{,}2 = 0 \rightarrow X_1 = -8{,}3$

Valorile din diagrama finală de moment se obţin, folosind relaţia : $M_t = m_1 X_1$

$M_{12} = -8{,}3$

$M_{23} = \frac{1}{2}(-8{,}3) = -4{,}15$

$M_{32} = 4{,}15$

$$u_3 = \alpha\left(\frac{5}{6}\cdot 5\cdot 7{,}5 + \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2{,}5 - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2{,}5 - \frac{5}{6}\cdot 5\cdot 7{,}5\right) +$$

$$\alpha\left(\frac{1}{0{,}3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3{,}33\cdot 5\cdot 35 + \frac{1}{0{,}5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3{,}33\cdot 4\cdot 45 - \frac{1}{0{,}5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}67\cdot 2\cdot 45 - \frac{1}{0{,}3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}67\cdot 5\cdot 35\right)$$

$u_3 = 938\alpha$

4.1.3 Aplicarea metodei deplasărilor în calculul structurilor acţionate de variaţie de temperatură

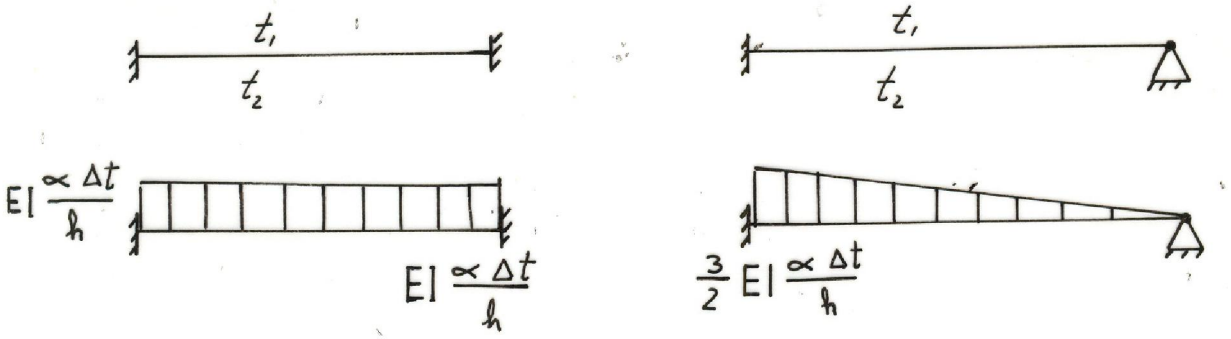
Acţiunea variaţiilor de temperatură ca încărcări asupra sistemului de bază conduce la apariţia de momente de încastrare perfectă deoarece sistemul de bază este static nedeterminat. Variaţiile de temperatură faţă de temperatura de realizare a structurii intervin sub două forme: diferenţa de temperatură Δ_t între feţele extreme ale barelor, şi temperatura medie t_m, care au efecte deosebite asupra barelor sistemului de bază.

Diferenţa de temperatură între feţe $(\Delta t = t_2 - t_1)$ are ca efect alungirea diferită a fibrelor de la partea inferioară, şi de la partea superioară şi deci curbarea barelor. În secţiunile de la capetele barelor blocate la rotiri, în sistemul de bază apar momente de încastrare perfectă care se determină prin metoda eforturilor. Expresiile acestor momente de încastrare perfectă pentru diferite cazuri de bare întîlnite în sistemul de bază sînt date în tabelul 4.1, în care s-a notat cu h=înălţimea secţiunilor barelor şi cu α coeficientul de dilatare termică liniară a materialului.

Tabel 4.1 Valorile momentelor de încastrare perfectă

-bară dublu încastrată $M_{ij} = EI\frac{\alpha\Delta t}{h}$; $M_{ji} = -EI\frac{\alpha\Delta t}{h}$

-bara încastrată –articulată $M_{ij} = \frac{3}{2}EI\frac{\alpha\Delta t}{h}$



Temperatura medie ($t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$) are ca efect alungirea barelor, nodurile blocate la rotiri în sistemul de bază suferă translaţii şi deci barele se deformează. Momentele de încastrare provin din rotirile barelor sistemului de bază şi se calculează cu termenii corespunzători din relaţiile din tabelul 4.2:

Table 4.2 Valorile momentelor de încastrare perfectă

-pentru bara dublu încastrată i-j $M_{ij} = M_{ji} = \frac{6EI}{l}\psi_{ij}$

-pentru bara încastrată şi articulată i-h $M_{ih} = \frac{3EI}{l}\psi_{ih}$

Rotirile barelor în sistemul de bază din încărcarea cu variaţia temperaturii în axa barelor se determină pe sistemul auxiliar articulat în toate nodurile şi încastrările sistemului de bază (cu gradele de libertate elastice blocate), deci pe un sistem invariabil format numai din bare articulate.

Aceste rotiri se pot determina fie pe baza configuraţiei pe care o ia sistemul articulat cînd barele se alungesc cu $\Delta l = \alpha t_m$, fie folosind formula Maxwell-Mohr pentru sisteme articulate.

$$(4.18)\ \mathrm{K}\,\theta_{ij} = \sum \alpha t_m \int n \cdot dx = \sum_k \alpha t_{mk} n_k l_k$$

în care k este o bară oarecare a sistemului, iar n_k este efortul axial în barele sistemului articulat din încărcarea virtuală pentru rotirea barei (un cuplu unitar format din forţe $1/l_{ij}$ la capetele barei i-j şi normale pe bară).

Exemplul 4.3: Să se rezolve structura static nedeterminată din fig.4.7a încărcată cu variaţie de temperatură. Se consideră $t_1 = -10^0, t_2 = 20^0$, produsul EI=24000KNm^2,înalţimea secţiunii transversale a barelor este constantă, h=30cm.

În cazul unei rezolvări prin metoda deplasărilor sistemul de bază este prezentat în fig.4.7b. Acesta se obţine prin blocarea nodului rigid şi a deplasării pe direcţia gradului de libertate elastică. Diagrama $M_{\Delta t}{}^0$ se obţine folosind valorile momentelor de încastrare perfectă din tabelul 4.1, iar diagrama datorată temperaturii medii se obţine trasînd iniţial o diagramă de deplasări a barelor (fig.4.7d) .

Calcul rigidităţi practice: $i_0 = \frac{EI}{4}; i_{24} = \frac{2EI}{6}\frac{4}{4} = 1{,}33 i_0$

Pentru a determina rotirile barelor din temperaturi medii se determină lungirile barelor:

$\Delta l_{12} = \alpha t_m l_{12} = 10^{-4} \cdot 5 \cdot 4 = 20\alpha$

$\Delta l_{24} = \alpha \cdot 5 \cdot 6 = 30\alpha$

$\Delta l_{34} = \alpha \cdot 5 \cdot 4 = 20\alpha$

Calcul de temperatură medie şi diferenţă de temperatură:

$t_m = \frac{20 - 10}{2} = 5^0 C; \Delta t = 30^0 C$

Calculul rotaţiei barei 1-2 din temperatură medie: $\psi_1 = \frac{\Delta l_{24}}{4} = \frac{30\alpha}{4} = 1{,}35$

Calculul termenilor liberi din sistemul de ecuaţii:

$R_{1t} = 72 - 24 = 48$

$R_{2t} 1 - \frac{1}{4}(36 - 1{,}35) = 0 \rightarrow R_{2t} = 8{,}66$

Coeficienţii r_{11} şi r_{12} se determină prin izolare de nod: $r_{11} = 8i_0; r_{12} = -1{,}5 i_0$

Coeficientul r_{22} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual:

$$r_{22} \cdot 1 - \frac{1}{4}(0{,}75i_0 + 2 \cdot 1{,}5i_0) = 0 \rightarrow r_{22} = 0{,}937i_0$$

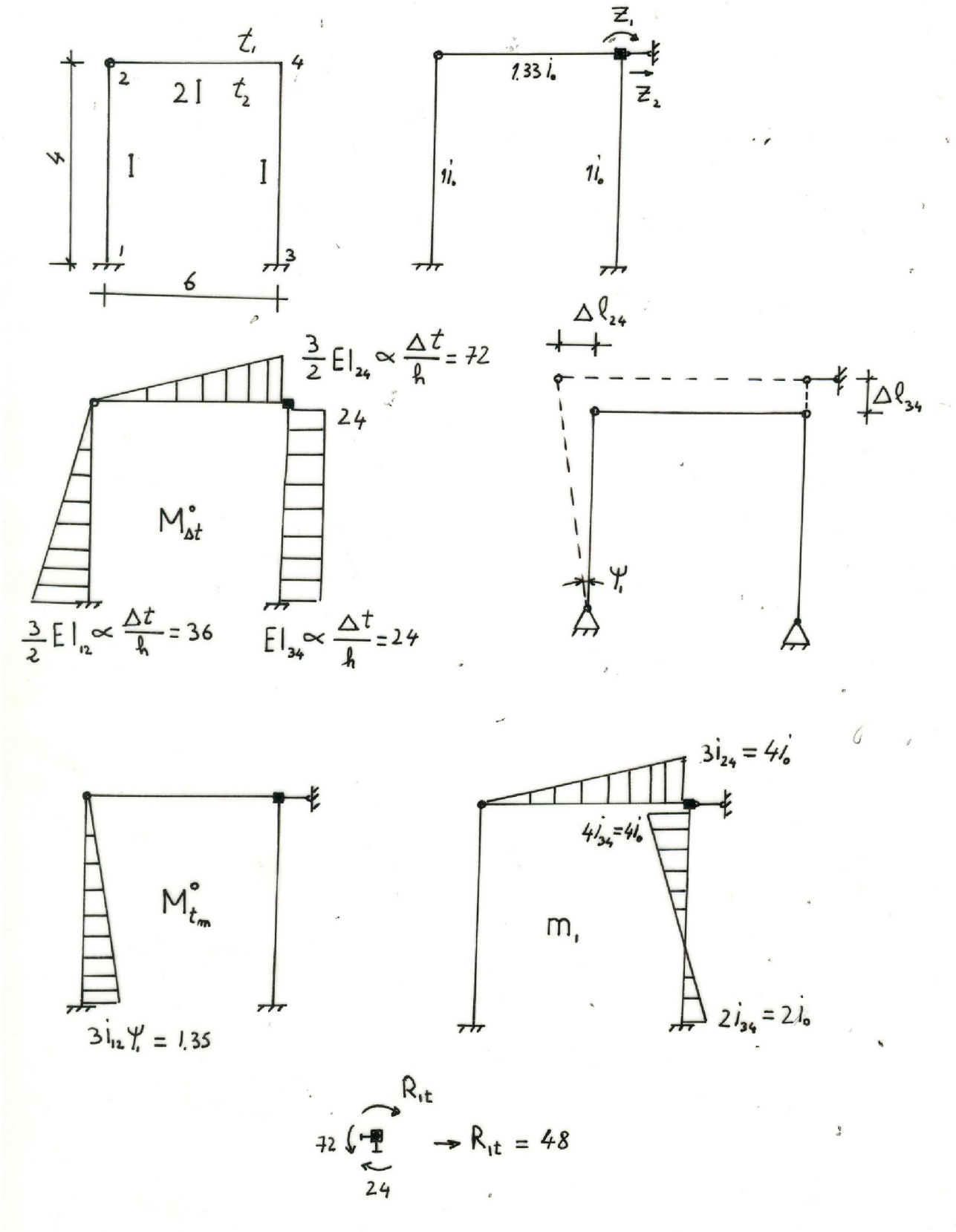


Fig.4.7 Structură static nedeterminată încărcată cu variaţie de temperatură

La calculul reacţiunilor R_{1t} şi R_{2t} se folosesc ambele diagrame $M_{\Delta t}^{0}, M_{tm}$ prin suprapunere de efecte.

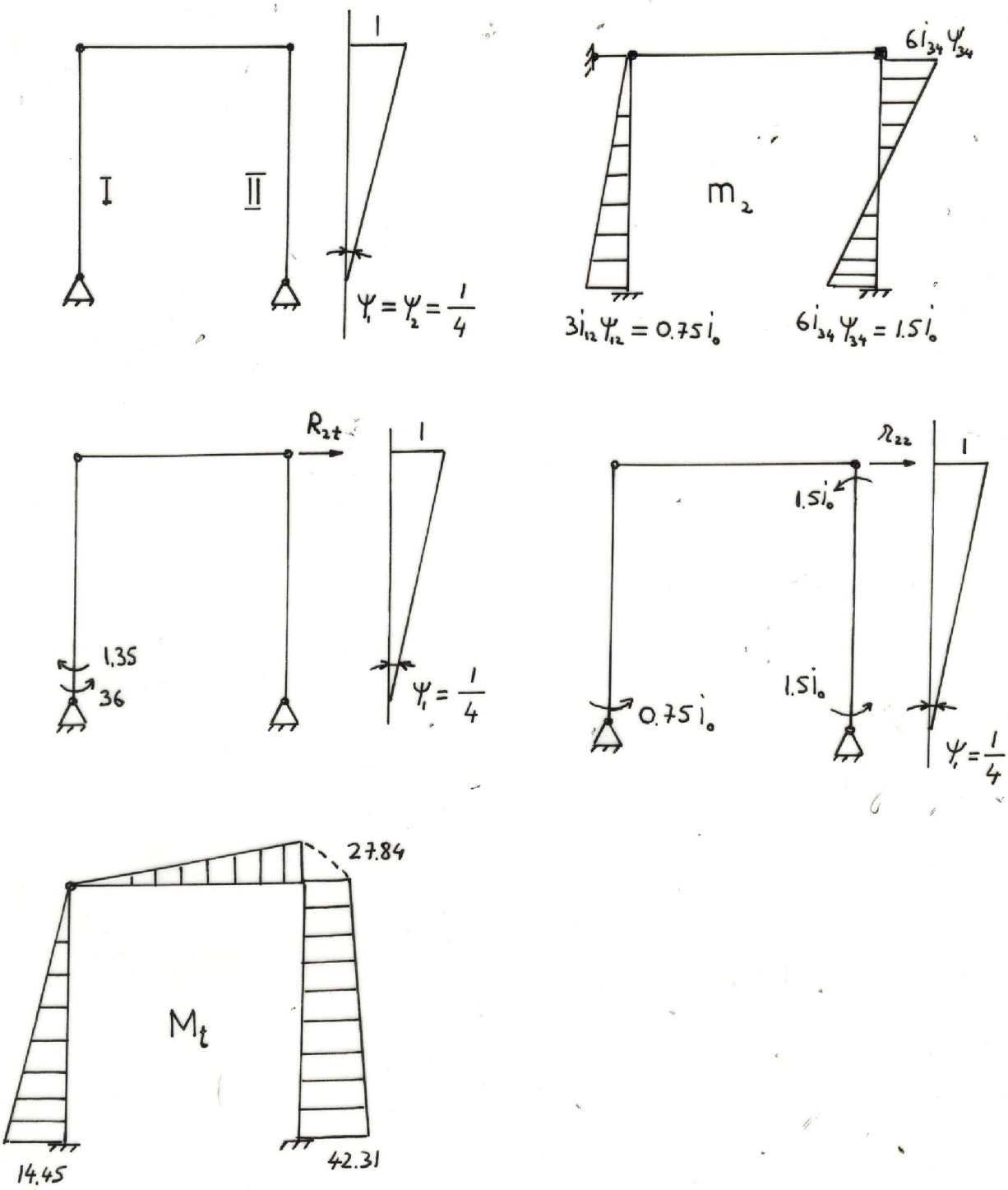


Fig.4.7 calculul reacţiunilor R_{2t},r_{22} folosind principiul lucrului mecanic virtual; diagramă finală de moment

Astfel sistemul de ecuaţii capătă forma:

$$8i_0Z_1 - 1{,}5i_0Z_2 + 48 = 0$$

$$-1{,}5i_0Z_1 + 0{,}937i_0Z_2 + 8{,}66 = 0$$

$Z_1 = -11{,}04 / i_0$

$Z_2 = -26{,}93 / i_0$

Diagrama finală se obţine prin suprapunere de efecte (fig.4.7):

$M_{12} = -36 + 1{,}35 + 0{,}75 \cdot 26{,}93 = -14{,}45$

$M_{42} = 72 - 4 \cdot 11{,}04 = 27{,}84$

$M_{34} = 24 - 2 \cdot 11{,}04 + 1{,}5 \cdot 26{,}93 = 42{,}31$

4.2 Acţiunea cedărilor de reazeme

Cedările de reazem apar datorită deplasărilor fundaţiilor. Aceste deplasări pot fi atît translaţii cît şi rotiri. În practica curentă aceste tasări apar în cele mai multe cazuri datorită proastei executări a fundaţiei sau datorită infiltraţiilor de apă în zona fundaţiei. Este evident faptul că aceste cedări de reazem, dacă se produc, induc o stare de eforturi suplimentară , în structurile static nedeterminate, care se suprapune peste starea de eforturi deja existentă.

Odată produse aceste cedări de reazem posibilităţile de remediere sînt extreme de reduse, singura soluţie fiind de stopare a cauzelor care au produs cedarea de reazem, dar revenirea la poziţia iniţiala a structurii este în cele mai multe cazuri imposibilă.

4.2.1 Structuri static determinate

La structurile static determinate cedările de reazem au ca efect modificarea configuraţiei geometrice a structurii fără deformarea barelor şi deci fără apariţia de eforturi. Barele se deplasează ca nişte corpuri rigide.

În oricare caz secţiunile transversale ale elementelor sau structurii se deplasează rotindu-se sau translatîndu-se.

Dacă cedarea de reazem se produce la o structură pe care acţionează un sistem de forţe P_i care au determinat în reazeme reacţiunile R_{ki}, atunci ansamblul acestor forţe produce lucru mecanic exterior, parcurgînd deplasările punctelor lor de aplicaţie sau rotirile corpurilor pe care acţionează.

Eforturile N_i M_i şi T_i (efecte ale forţelor P_i)nu produc lucru mecanic deoarece elementele nu se deformează.

Expresia lucrului mecanic exterior va fi:

$$(4.19)\ \mathrm{K}\ L_{ex} = \sum P_i \Delta_{i\Delta} + \sum R_{ki} \Delta_k$$

Conform teoremei lui Clapeyron $L_{ex}=L_{ef}$, dar deoarece $L_{ef}=0$ rezultă $L_{ex}=0$ şi din (4.19) se obţine:

$$(4.20)\ \mathrm{K}\ \sum P_i \Delta_{i\Delta} = -\sum R_{ki} \Delta_k$$

unde $\Delta_{i\Delta}$ sînt deplasările pe direcţiile forţelor P_i produse de cedările de reazeme, R_{ki} sînt reacţiunile produse în reazemele k de forţele P_i iar Δ_k sînt cedările de reazeme.

Pentru stabilirea expresiei deplasării unei secţiuni, în cazul cedărilor de reazeme, se fac următoarele particularizări în relaţia (4.20):

-se consideră că sistemul de forţe P_i este format dintr-o singură forţă şi aceea egală cu unitatea, $P_i=1$.

-reacţiunile produse de această încărcare sînt notate cu r_{ki}.

Cu aceste elemente se obţine expresia deplasării unei secţiuni în cazul cedărilor de rerazeme:

$$(4.21)\ \mathrm{K}\ \Delta_{i\Delta} = -\sum r_{ki} \Delta_k$$

Obs. În cazul general al unei structuri static determinate încărcate cu forţe, variaţie de temperatură şi cedări de reazeme, relaţia Maxwell-Mohr, pentru calculul deplasării unei secţiuni, are forma următoare:

$$(4.22)\ \mathrm{K}\ \Delta_i = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta}$$

sau dezvoltat:

$$(4.23)\ \mathrm{K}\,\Delta_i = \int \frac{m_3 M}{EI}dx + \int \frac{n_i N}{EA}dx + \int \frac{\alpha t_i T}{GA}dx + \alpha \int n_i t_m dx + \alpha \int m_i \frac{\Delta t}{h}dx -$$

$$- \sum r_{ki}\Delta_k$$

O altă formă de obţinere a expresiei (4.23) este următoarea:

Fie structura din figura 4.7 la care încastrarea suferă deplasări de valoare cunoscută , şi anume u,v,w. Urmează să se stabilescă proiecţia deplasării unei secţiuni j după direcţia k. Pentru aceasta se aplică pe structură în secţiunea j o încărcare virtuală unitară care are direcţia k. Aceasta va da naştere în reazeme la reacţiunile $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r_4}$. Structura este în echilibru sub acţiunea încărcării virtuale unitare şi a reacţiunilor din reazeme. Deoarece cedările reazemelor sînt foarte mici în raport cu dimensiunile generale ale structurii, trecerea structurii din poziţia iniţială în poziţia deplasată poate fi considerată o deplasare infinit mică care să stea la baza exprimării echilibrului cu ajutorul principiului lucrului mecanic.

Adică:

$$\delta L = 0$$

$$\Delta_{jk} + (-\overline{r_1}u - \overline{r}_2 v - \overline{r}_3\theta) = 0$$

$$\Delta_{jk} = -(-\overline{r_1}u - \overline{r}_2 v - \overline{r}_3\theta)$$

În cazul general, cînd se înregistrează cedări de reazeme pe direcţiile a n legături simple, expresia deplasării capătă forma:

$$\Delta_{jk} = -\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \Delta_{ri}$$

unde $\overline{r}_i$ reprezintă reacţiunea din legătura simplă i provenită din încărcarea virtuală unitară aplicată în secţiunea j pe direcţia deplasării cerute; Δ_{ri} este cedarea de reazem pe direcţia legăturii i.

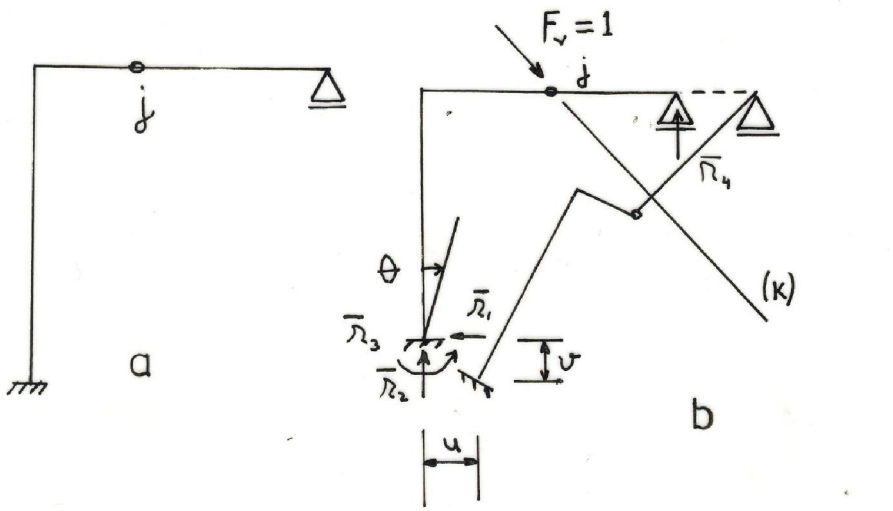


Figura 4.7 Încărcarea cu cedări de reazeme date a)structură iniţială; b) forma deplasată ca urmare a acţiunii cedărilor de reazeme

4.2.2 Metoda eforturilor

Aşa cum s-a arătat anterior, pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate, fie prin metoda eforturilor, fie prin metoda deplasărilor, este necesară alcătuirea unui sistem de ecuaţii de condiţie. Coeficienţii necunoscutelor depind numai de caracteristicile structurii şi numai termenii liberi depind de încărcare. Schimbînd încărcarea se schimbă termenii liberi.

La fel ca în cazul încărcării cu variaţie de temperatură, încărcarea cu cedări de reazem nu produce eforturi pe sistemul de bază din metoda eforturilor. Coeficienţii δ_{ij} se calculează la fel ca la încărcarea cu forţe, nefiind influenţaţi de cedări de reazem. Termenii liberi $\Delta_{i\Delta}$ se calculează cu expresia 4.25. Astfel fiecare termen $\Delta_{i\Delta}$ se calculează pe baza reacţiunilor r_{ki} ,obţinute din încărcarea sistemului de bază cu necunoscutele X_i=1. Reacţiunile r_{ki} apar în expresia 4.25 înmulţite cu cedările de reazem, în cazul în care există cedări de reazem pe direcţia reacţiunii respective.

În cazul în care cedarea de reazem are aceeaşi direcţie cu reacţiunea r_{ki} , produsul respectiv va avea semnul plus în expresia 4.25, în caz contrar va avea semnul minus.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie al metodei eforturilor, în situaţia încărcării structurii cu cedări de reazeme, are forma:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1\Delta} = 0 \\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2\Delta} = 0 \\
&.... \\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n\Delta} = 0
\end{aligned} \quad (4.24)$$

unde termenul liber are expresia:

$$K\,\Delta_{i\Delta} = -\sum r_{ki}\Delta_k \quad (4.25)$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se obţin necunoscutele X_1 X_2 ..X_n cu care se calculează momentul încovoietor în orice secţiune, prin suprapunere de efecte:

$$K\,M_\Delta = m_1X_1 + m_2X_2 + m_nX_n \quad (4.26)$$

La expresia (4.26) nu intervine nici un termen de forma M_Δ^0 deoarece sistemul de bază este static determinat şi cedările de reazem nu produc eforturi pe aceste sisteme.

Deplasarea unei secţiuni, pentru încărcarea cu cedări de reazeme se calculează cu relaţia:

$$K\,\Delta_i = \Delta_{i\Delta} + \Delta = \Delta_{i\Delta} + \int \frac{m_i M_\Delta}{EI}dx = \Delta_{i\Delta} + \int \frac{m_i^{\,0} M_\Delta}{EI}dx \quad (4.27)$$

unde $\Delta_{i\Delta}$ are forma (4.25) şi se calculează pe sistemul de bază utilizat pentru determinarea diagramei m_i^0 .

4.2.3 Metoda deplasărilor

Sistemul de bază în metoda deplasărilor este multiplu static nedeterminat şi în consecinţă cedarea de reazem va produce eforturi pe sistemul de bază.

Momentele de încastrare perfectă rezultate din acţiunea cedărilor de reazeme date se determină corespunzător efectului diferit al celor două tipuri de cedări asupra sistemului de bază.

Cedările de reazem rotiri sînt echivalente cu rotiri ale capetelor de bară unde are loc cedarea. Dacă cedează un capăt i al barei i-j printr-o rotire θ_i, se deformează numai această bară, momentele de încastrare obţinîndu-se cu termenii respectivi din relaţiile fundamentale:

-pentru bara dublu încastrată $M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}}\theta_{ij}$; $M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}}\theta_{ij}$

-pentru bara încastrată şi articulată $M_{ik} = \frac{3EI}{l_{ih}}\theta_{ik}$

Cedările de reazem translaţii au ca efect asupra sistemului de bază translaţii de noduri care sînt echivalente cu rotiri de bare ψ_{ij}.Momentele de încastrare perfectă se calculează cu termenii corespunzători de la rotiri de bare din relaţiile fundamentale stabilite anterior:

-pentru bara dublu încastrată $M_{ij} = M_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}}\psi_{ij}$

-pentru bara încastrată şi articulată $M_{ik} = -\frac{3EI}{l_{ik}}\psi_{ik}$

Determinarea rotirilor de bare ψ_{ij} se face pe baza configuraţiei sistemului articulat al sistemului de bază la care se impun cedările de reazeme date.

În expresiile date pentru momentele de încastrare perfectă rotirile θ_i şi ψ_{ij} se introduc cu semnul lor.

În figura 4.8 se exemplifică efectul cedărilor de reazeme asupra sistemului de bază, cedări rotiri, cedări translaţii. Modul de calcul este de determinare simplă a rotirilor de bare, care apoi se suprapun.

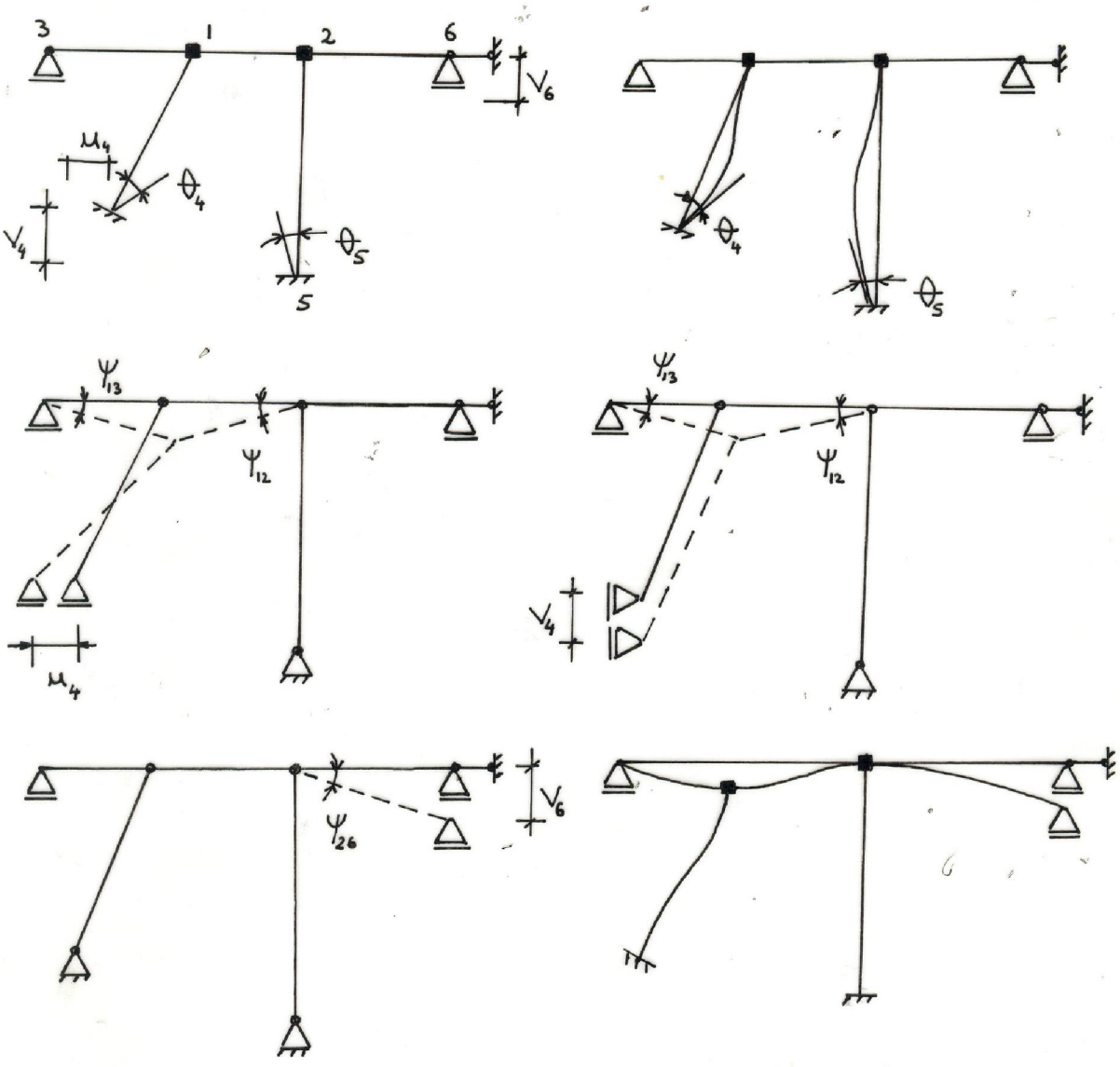


Figura 4.8 Încărcare cu cedări de reazeme pe o structură static nedeterminată

Exemplul 4.4: Să se determine deplasarea pe orizontală a nodului 4 ca urmare a acţiunii cedărilor de reazeme, pentru structura static determinată din figura 4.9.

Pentru determinarea deplasării nodului 4 ,din cedări de reazem, se încarcă structura cu o forţă unitate pe direcţia deplăsării căutate. Ulterior prin sume de moment, se determină reacţiunile orizontale şi verticale. Pentru determinarea deplasării u_4 se aplică apoi relaţia 4.16.

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 + 1 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{3}{4}$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -\frac{3}{4} \cdot 4 + H_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_4 = -\sum R_{ki} \cdot \Delta_k = -(-7 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2}) = 7{,}25cm$$

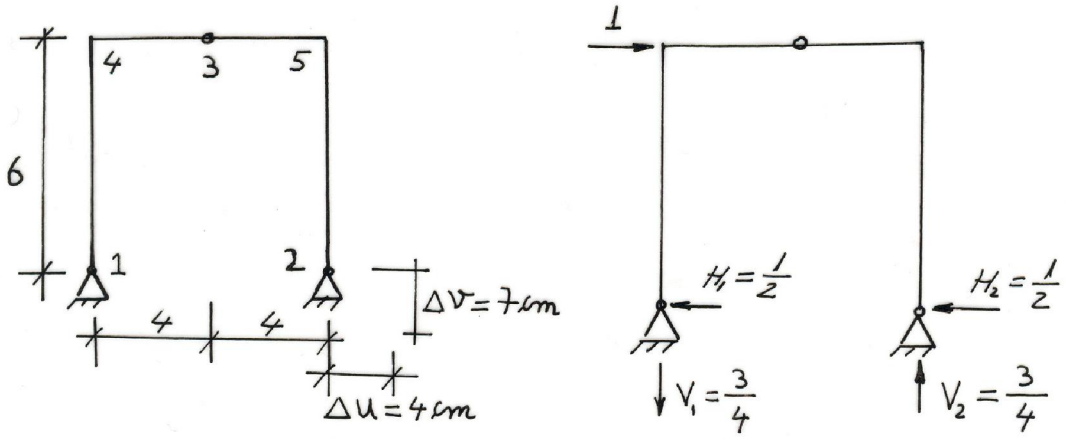


Fig.4.9 Cedări de reazeme la structuri static determinate

Exemplul 4.5: Să se traseze diagrama de momente încovoietoare pentru structura static nedeterminată din figura 4.10, ca urmare a acţiunii cedărilor de reazeme, utilizînd metoda eforturilor.

Structura este o dată static nedeterminată , astfel încît sistemul de bază se obţine eliminînd încastrarea şi introducînd în locul ei o articulaţie, plus necunoscuta moment X_1. Sistemul de bază, încărcat cu necunoscuta moment X_1 =1 produce reacţiunile V_1,V_2 .

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 1 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{6}$$

Ecuaţia de condiţie are forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\,2}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{1{,}5EI} 1 \cdot 5 \cdot 1 = \frac{4{,}33}{EI}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum R_{ki} \Delta_k = -(7 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{7}{6} = -1{,}17cm$$

EI=18000KN/m^2

$$\rightarrow 4{,}33 X_1 - 1{,}17 \cdot 10^{-2} \cdot 18000 = 0 \rightarrow X_1 = 48{,}64$$

$$M = m \cdot X_1 \rightarrow M_{24} = 1 \cdot 48{,}64 = 48{,}64$$

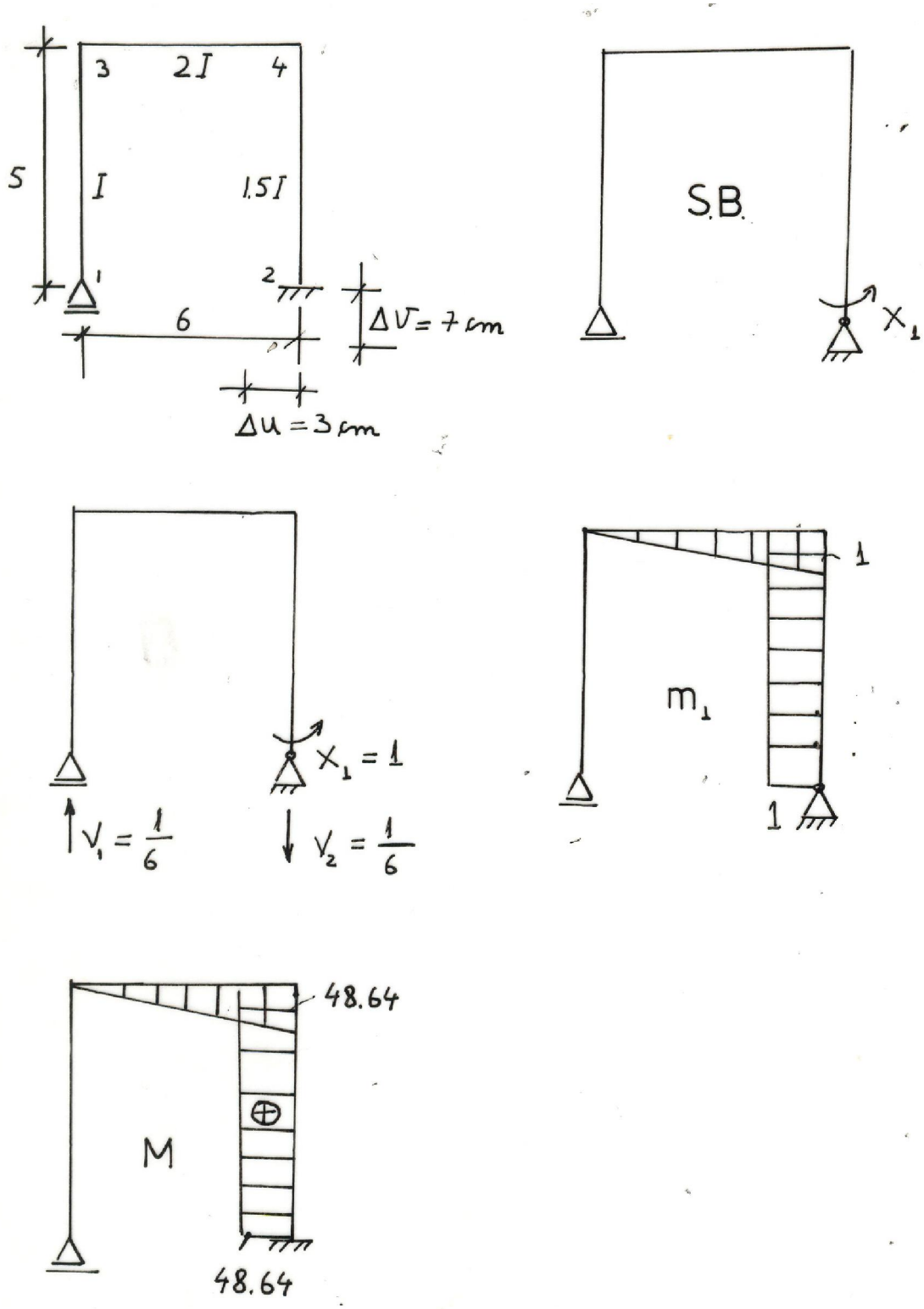


Figura 4.10 Structură static nedeterminată acţionată de cedări de reazeme

Exemplul 4.6: Să se determine diagrama de momente încovoietoare pentru structura static nedeterminată din figura 4.11 încărcată cu cedări de reazem, utilizînd metoda eforturilor

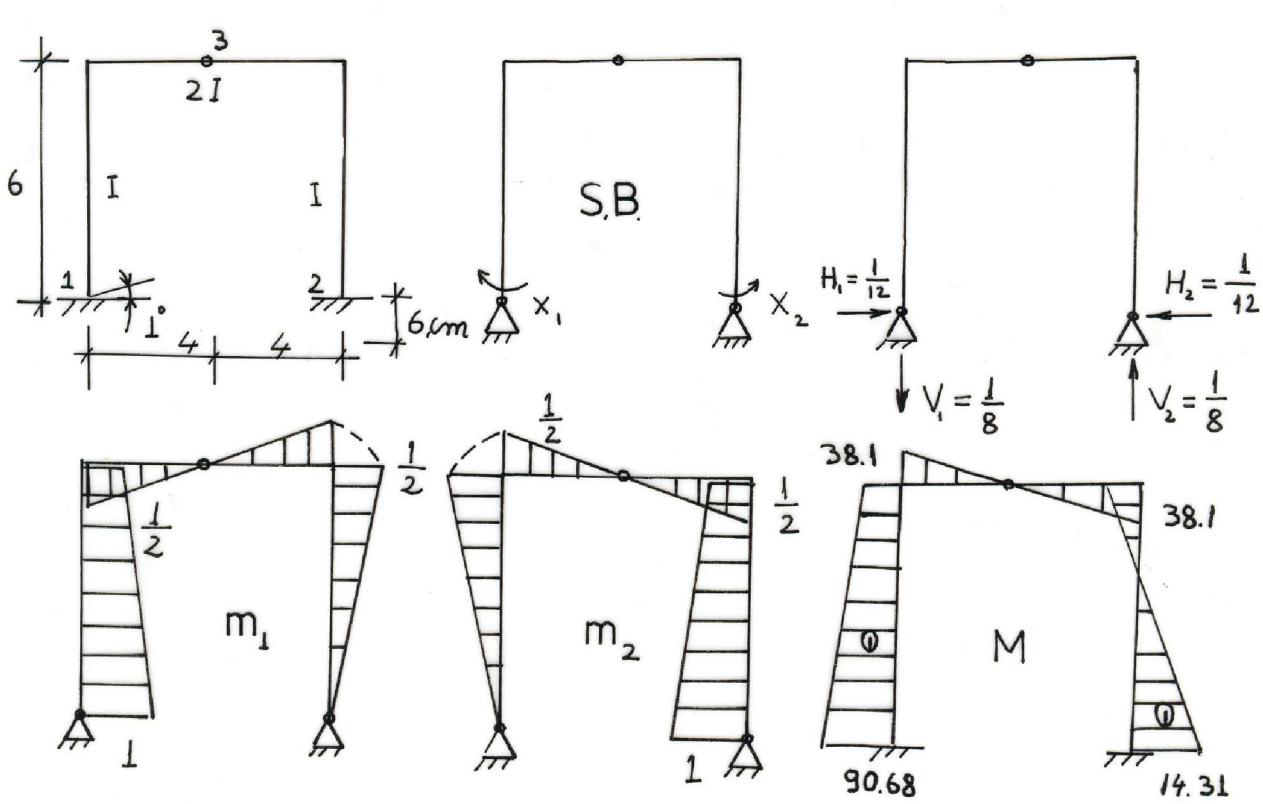


Fig.4.11 Efectul cedărilor de reazeme pentru structuri static nedeterminate

Structura este de două ori static nedeterminată, sistemul de bază se obţine prin eliminarea încastrărilor 1 şi 2 şi introducerea de articulaţii plus echivalentul mecanic momentele X_1 şi X_2.

Pentru încărcarea sistemului de bază cu X_1=1 se obţin reacţiunile V_1 şi V_2:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -8V_1 + 1 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{8}$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -\frac{1}{8}4 + 1 - H_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_1 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Coeficienţii necunoscutelor se determină folosind relaţia Maxwell-Mohr:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\,2}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1\right)$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{EI}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\delta_{11} = \frac{5{,}33}{EI} = \delta_{22}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1\right) - 2 \cdot \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2{,}33}{EI}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum R_{ki}\Delta_k = -(-1 \cdot 0{,}01745 - \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}) = 0{,}025$$

$$\Delta_{2\Delta} = -\left(\frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}\right) = -0{,}0075$$

Sistemul ecuaţiilor de condiţie are forma:

$$\begin{matrix} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Delta} = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 5{,}33X_1 - 2{,}33X_2 + 0{,}025 \cdot 18000 = 0 \\ -2{,}33X_1 + 5{,}33X_2 - 0{,}0075 \cdot 18000 = 0 \end{matrix}$$

Soluţiile sînt:

$X_1 = -90,68$

$X_2 = -14,31$

Diagrama finală se obţine prin suprapunere de efecte folosind relaţia: $M = m_1 X_1 + m_2 X_2$

$M_{14} = -90,68$

$M_{41} = -\frac{90,68}{2} + 0,5 \cdot 14,31 = -38,1$

$M_{52} = 0,5 \cdot 90,68 - 0,5 \cdot 14,31 = 38,1$

Exemplul 4.7: La cadrul static determinat din figura 4.12 se cere deplasarea pe verticală a articulaţiei C produsă de:

-încărcarea uniform distribuită

-variaţia de temperatură

-cedarea reazemului B

Structura este alcătuită dintr-un profil I30 cu caracteristicile următoare: I=9800cm^2,A=69,1cm^2, η=2,1

Pentru oţel se consideră:

E=2,1x10^6 daN/cm^2; G=0,81x10^6 daN/cm^2; α=1,2x10^{-5}

În figura 4.12 sînt prezentate diagramele de eforturi din încărcările reale, precum şi cele din încărcarea virtuală aplicată în articulaţia C, pe direcţia verticală.

a) încărcarea cu forţe. Se va calcula separat săgeata v_0 datorită fiecăruia din cele trei eforturi, pentru a se putea aprecia efectul fiecăruia.

-Efectul forţei axiale N

$EAv_c = (-90 \cdot 4)(-0,5) + (-22,5 \cdot 6)(-0,375) + (-30 \cdot 4)(-0,5) = 290,6 KN \cdot m$

$EA = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 69,1 = 14,5 \cdot 10^7 daN = 14,5 \cdot 10^5 KN$

$v_c = \frac{290,6}{EA} = \frac{290,6}{14,5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-4} m = 0,02 cm$

-Efectul forţei tăietoare T

$\frac{GA}{\eta} v_c = (-22,5 \cdot 4)(-0,375) + (0,5 \cdot 30)(3) + (-3 \cdot 30)(-0,5) +$

$+ (22,5 \cdot 4)(0,375) = 157,5 KNm$

$GA = 0,81 \cdot 10^6 \cdot 69,1 = 5,6 \cdot 10^7 daN = 5,6 \cdot 10^5 KN$

$v_c = \frac{157,5 \cdot \eta}{GA} = \frac{157,5 \cdot 2,1}{5,6 \cdot 10^5} = 5,9 \cdot 10^{-4} m = 0,059 cm$

-Efectul momentului încovoietor M

$EIv_c = \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 4\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 1,5\right)\right] \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 1,5\right) +$

$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot 45 \cdot 3\left(\frac{1}{2} \cdot 1,5\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 1,5\right) = 562,5 KN \cdot m^3$

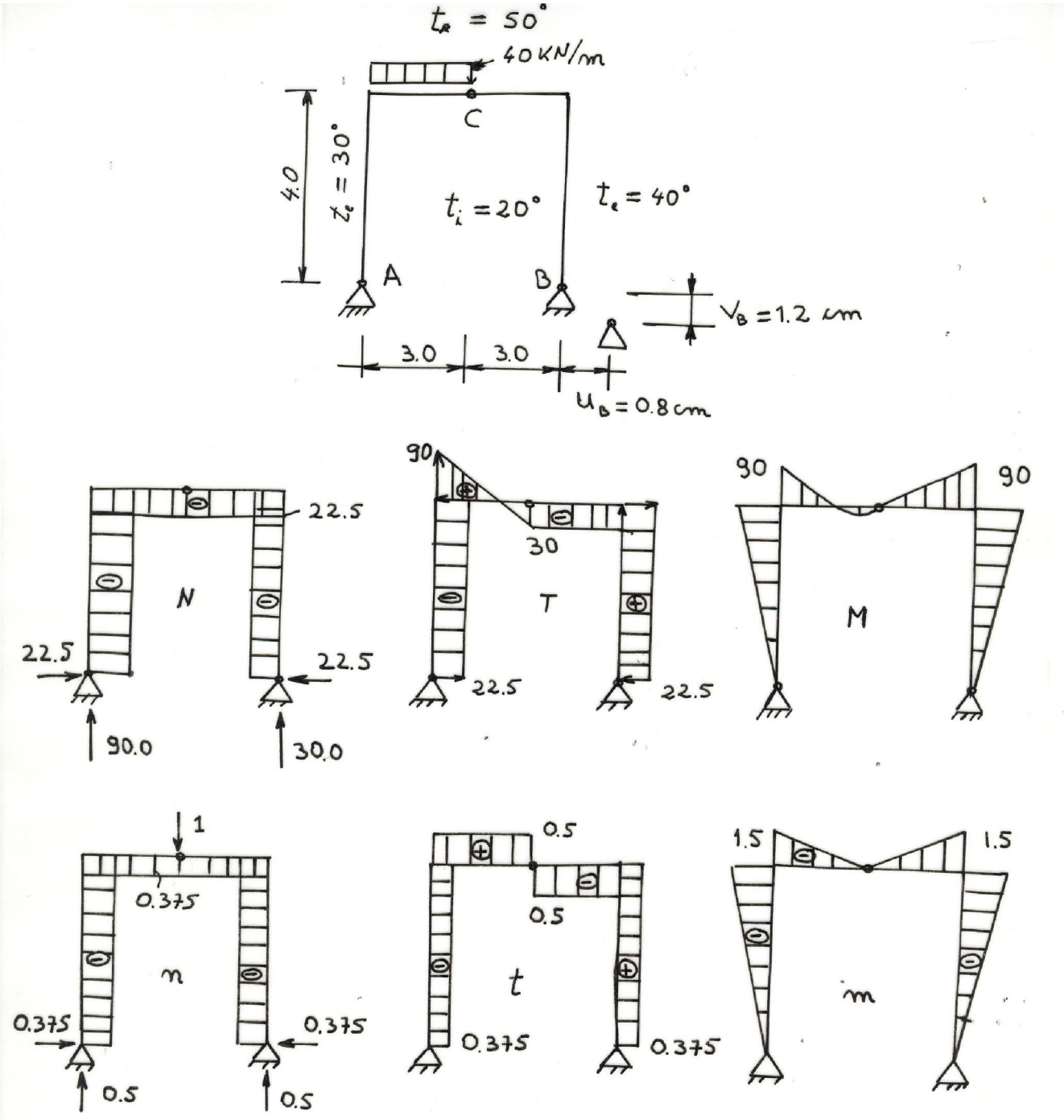


Figura 4.12 Structură static determinată acţionată cu forţă uniform distribuită, cedare de reazeme, variaţie de temperatură.

$$EI = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 9800 = 20{,}55 \cdot 10^9 \, daN \cdot cm^2 = 20550 KN \cdot m^2$$

$$v_c = \frac{562{,}5}{EI} = \frac{562{,}5}{20550} = 2{,}775 \cdot 10^{-2} \, m = 2{,}775 cm$$

Săgeata totală:

$$v_c = v_c^{\,N} + v_c^{\,T} + v_c^{\,M} = 0{,}02 + 0{,}059 + 2{,}775 = 2{,}854 cm$$

Faţă de valoarea totală a săgeţii, contribuţia forţei axiale este de 0,7%, a forţei tăietoare de 2,1% iar a momentului încovoietor de 97,2% ceea ce justifică luarea în consideraţie numai a momentului încovoietor.

Variaţia de temperatură

$$v_c = \alpha \int n_i t_m dx + \alpha \int m_i \frac{\Delta t}{h} dx$$

Valorile t_o şi Δt pentru barele cadrului sînt următoarele:

Stîlp A: $t_0 = \frac{20+30}{2} = 25^0; \Delta t = 20-30 = -10^0$

Riglă: $t_0 = \frac{20+50}{2} = 35^0; \Delta t = 20-50 = -30^0$

Stîlp B: $t_0 = \frac{20+40}{2} = 30^0; \Delta t = 20-40 = -20^0$

Cu aceste valori rezultă:

$$v_c = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\left[25(-0{,}5 \cdot 4) + 35(-0{,}375 \cdot 6) + 30(-0{,}5 \cdot 4)\right] +$$

$$+1{,}2 \cdot 10^{-5}\left[\frac{-10}{0{,}3}\left(\frac{1{,}5 \cdot 4}{2}\right) + \frac{-30}{0{,}3} \cdot 2\left(-\frac{1{,}5 \cdot 3}{2}\right) + \frac{-20}{0{,}3}\left(-\frac{1{,}5 \cdot 4}{2}\right)\right] =$$

$$= -226 \cdot 10^{-5} + 900 \cdot 10^{-5} = 674 \cdot 10^{-5} m = 0{,}674cm$$

Cedările de reazeme:

$$v_c = -\sum r_{ki}\Delta_k = -\left[(-0{,}5 \cdot 1{,}2) + (-0{,}375 \cdot 0{,}8)\right] = 0{,}9cm$$

Exemplul 4.8 Să se traseze diagrama de moment încovoietor, utilizînd metoda deplasărilor, din acţiunea cedărilor de reazeme, pentru structura din figura 4.13a, considerînd EI=18000KNm^2.

Calculul rigidităţilor practice:

$$i_0 = \frac{EI}{6} = 3000;\ i_{12} = \frac{EI}{5} \cdot \frac{6}{6} = 1{,}2i_0$$

Transformarea rotaţiei în radiani:

$$\theta = 1{,}5^0 = 1{,}5 \cdot 0{,}01745rad = 0{,}0261rad$$

$$\psi_{24} = \frac{\Delta v}{6} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{6} = 10^{-2}$$

Reacţiunile r_{11} şi r_{12} se calculează prin izolare de nod:

$$r_{11} = 10{,}8i_0,\ r_{12} = -1{,}44i_0$$

Reacţiunea r_{22} se obţine prin lucru mecanic virtual:

$$r_{22} \cdot 1 - \frac{1}{5}(2 \cdot 1{,}44i_0 + 0{,}72i_0) = 0 \rightarrow r_{22} = 0{,}72i_0$$

Calculul termenilor liberi:

$$R_{1\Delta} = 367{,}5;$$

$$R_{2\Delta} \cdot 1 - \frac{1}{5}(375 + 187{,}5) = 0 \rightarrow R_{2\Delta} = 112{,}5$$

Sistemul de ecuaţii devine:

$$10{,}8i_0 Z_1 - 1{,}44i_0 Z_2 + 367{,}5 = 0$$

$$-1{,}44i_0 Z_1 + 0{,}72i_0 Z_2 + 112{,}5 = 0$$

$$Z_1 = -74{,}81$$

$$Z_2 = -305{,}87$$

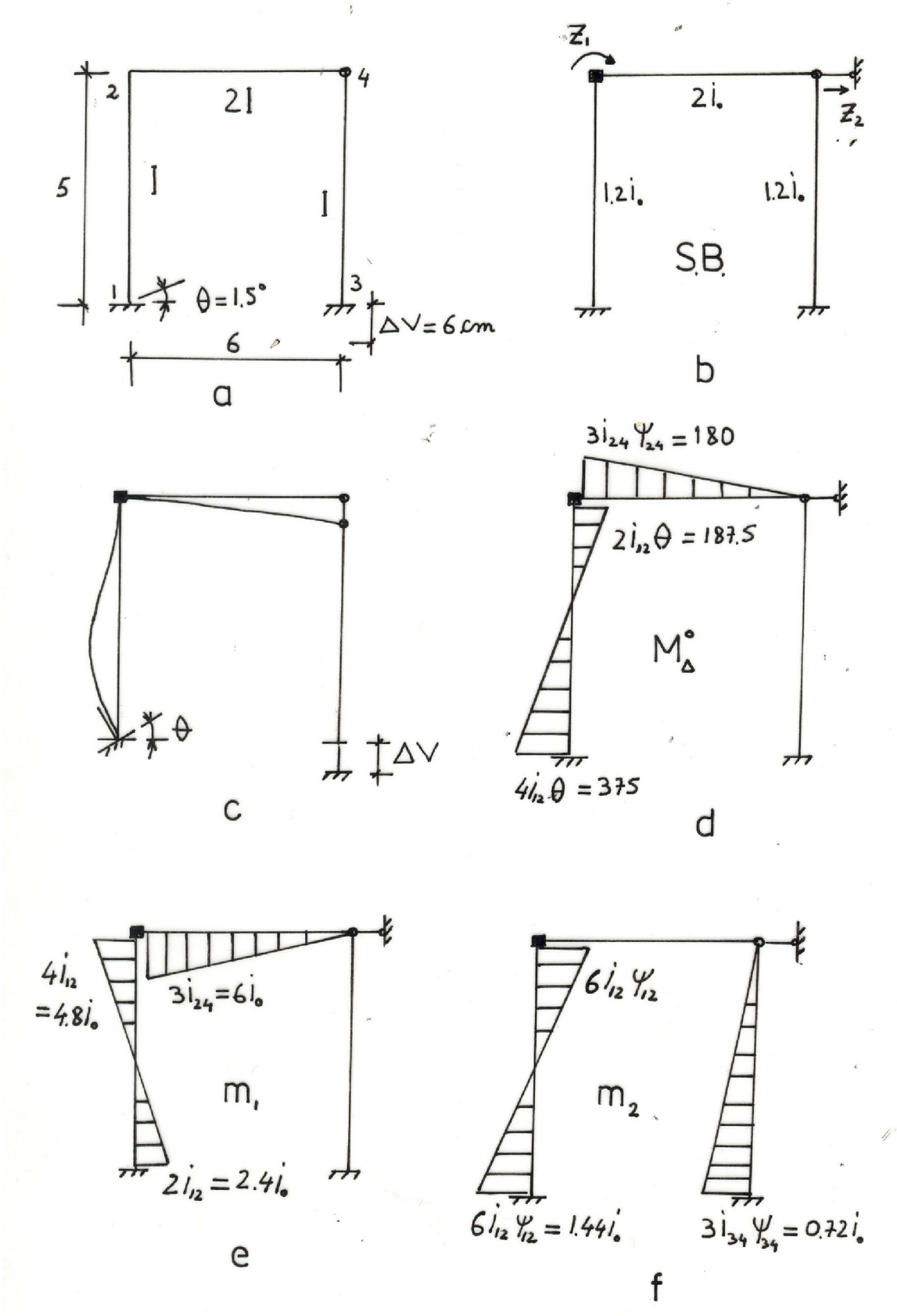


Fig.4.13 Structură static nedeterminată acţionată de variaţia de temperatură, rezolvată prin metoda deplasărilor

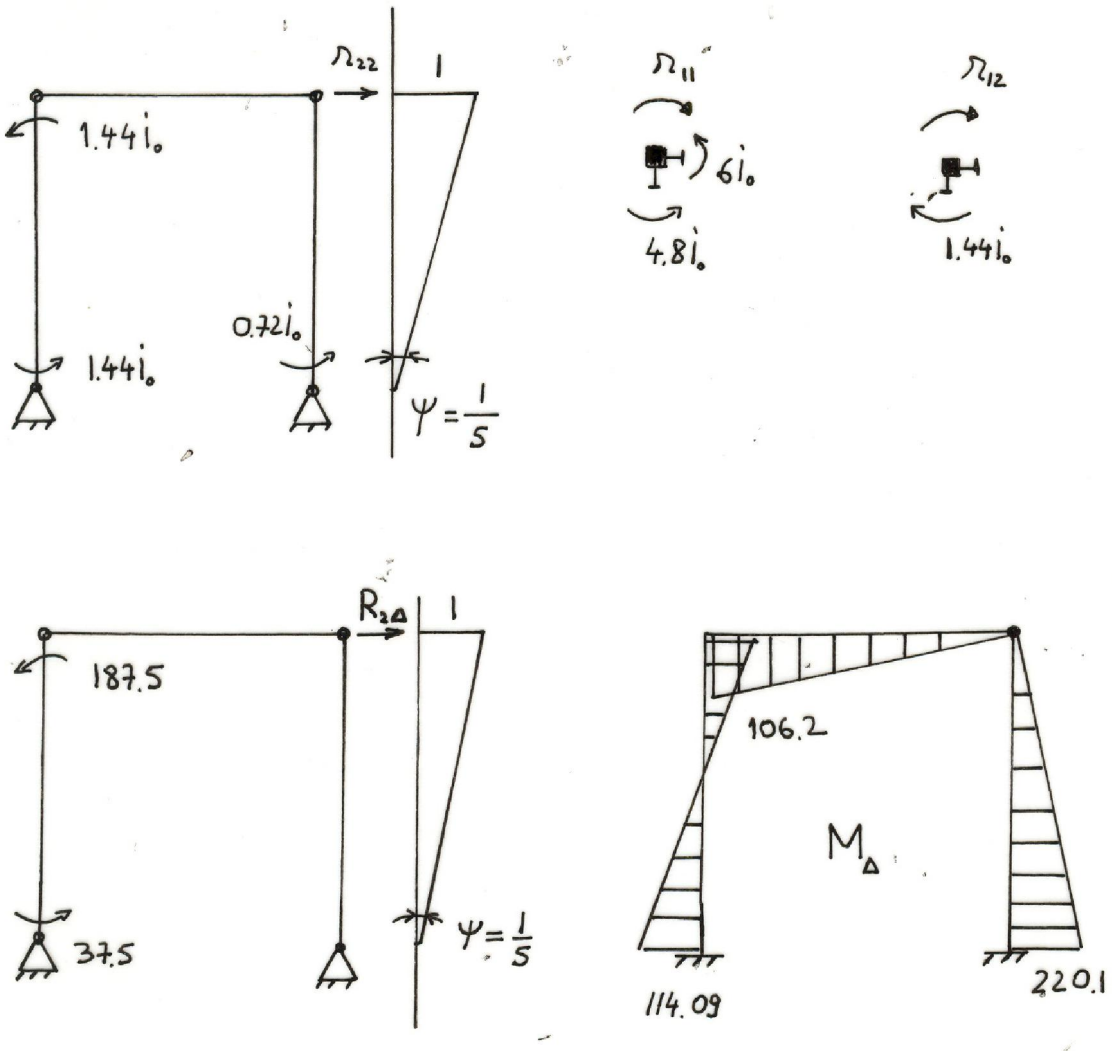


Fig. 4.14 Calcul reacţiunii r_{22} şi $R_{2\Delta}$ şi diagramă finală de moment încovoietor din acţiunea cedărilor de reazem

$$M_{12} = -375 - 2{,}4 \cdot 74{,}81 + 1{,}44 \cdot 305{,}87 = -114{,}09$$
$$M_{21} = -187{,}5 - 4{,}8 \cdot 74{,}81 + 1{,}44 \cdot 305{,}8 = -106{,}2$$
$$M_{34} = 0{,}72 \cdot 305{,}8 = 220{,}1$$

CAP.5 PROCEDEUL DISTRIBUIRII ŞI TRANSMITERII MOMENTELOR (PROCEDEUL CROSS)

La calculul cadrelor multiple, dificultatea principală constă în rezolvarea ecuaţiilor de condiţie. Deşi în metoda deplasărilor numărul necunoscutelor este de obicei mai redus la acest fel de structuri decît în metoda eforturilor, totuşi problema rezolvării ecuaţiilor rămîne pe primul plan.

Rezolvarea prin metode iterative (aproximaţii succesive) prezintă avantaje evidente. Eficienţa procedeului depinde de rapiditatea convergenţei iteraţiei. Sistemul ecuaţiilor de condiţie din metoda deplasărilor, care conţine numai necunoscute rotiri (de nod sau de bară), îndeplineşte obişnuit această cerinţă, astfel că rezolvarea cadrelor multiple poate fi făcută cu ajutorul schemelor de iterare.

Procedeul Cross reprezintă de fapt o rezolvare mascată a sistemului de ecuaţii.

Sistemul de ecuaţii al metodei deplasărilor are asigurată convergenţa procesului iterativ, rapiditate mai mare existînd în cazul structurilor cu noduri fixe unde fiecare ecuaţie respectă criteriul:

$$(5.1)\,\mathrm{K}\; r_{ii} > \sum \left| r_{ij} \right|$$

Calculul structurilor prin aproximaţii succesive se conduce pe o schemă care se confundă cu schema de calcul a structurii, fără a mai fi necesară scrierea sistemului de ecuaţii. Din această cauză de multe ori se scapă din vedere legătura cu metoda generală de calcul care în mod obişnuit este metoda deplasărilor.

Pentru a ilustra modul în care se determină elementele necesare calculului structurilor prin acest procedeu se analizează cazul unei structuri cu noduri fixe, avînd un singur nod, iar ulterior se va arăta cum se operează pe structuri cu mai multe noduri.

Fie structura cu noduri fixe din fig.5.1, şi sistemul de bază obţinut prin blocarea nodului rigid. Ecuaţia de condiţie în acest caz are forma: $r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$

Din încărcarea sistemului de bază cu rotirea $z_1=1$ se obţine diagrama unitară m_1 iar din încărcarea cu forţele exterioare se obţine diagrama M_p^0. Se presupune $m_{23}>m_{21}$.

Reacţiunea unitară r_{11} se calculează din condiţia de echilibru static al nodului 2:

$$(5.2)\,\mathrm{K}\; r_{11} = 3i_{12} + 4i_{25} + 3i_{23} + 4i_{24}$$

Dînd factor comun pe 4 şi înmulţind şi împărţind cu i_0 se obţine:

$$(5.3)\,\mathrm{K}\; r_{11} = 4i_0\left(\frac{i_{25}}{i_0} + \frac{i_{24}}{i_0} + \frac{3}{4}\frac{i_{12}}{i_0} + \frac{3}{4}\frac{i_{23}}{i_0}\right)$$

Notînd rapoartele din paranteză în modul următor:

$$(5.4)\,\mathrm{K}\; \rho_{25} = \frac{i_{25}}{i_0};\ \rho_{24} = \frac{i_{24}}{i_0};\ \rho_{21} = \frac{3}{4}\frac{i_{12}}{i_0};\ \rho_{23} = \frac{3}{4}\frac{i_{23}}{i_0}$$

pentru reacţiunea r_{11} rezultă forma:

$$(5.5)\,\mathrm{K}\; r_{11} = 4i_0(\rho_{25} + \rho_{24} + \rho_{21} + \rho_{23})$$

sau

$$(5.6)\,\mathrm{K}\; r_{11} = 4i_0 \sum \rho_2$$

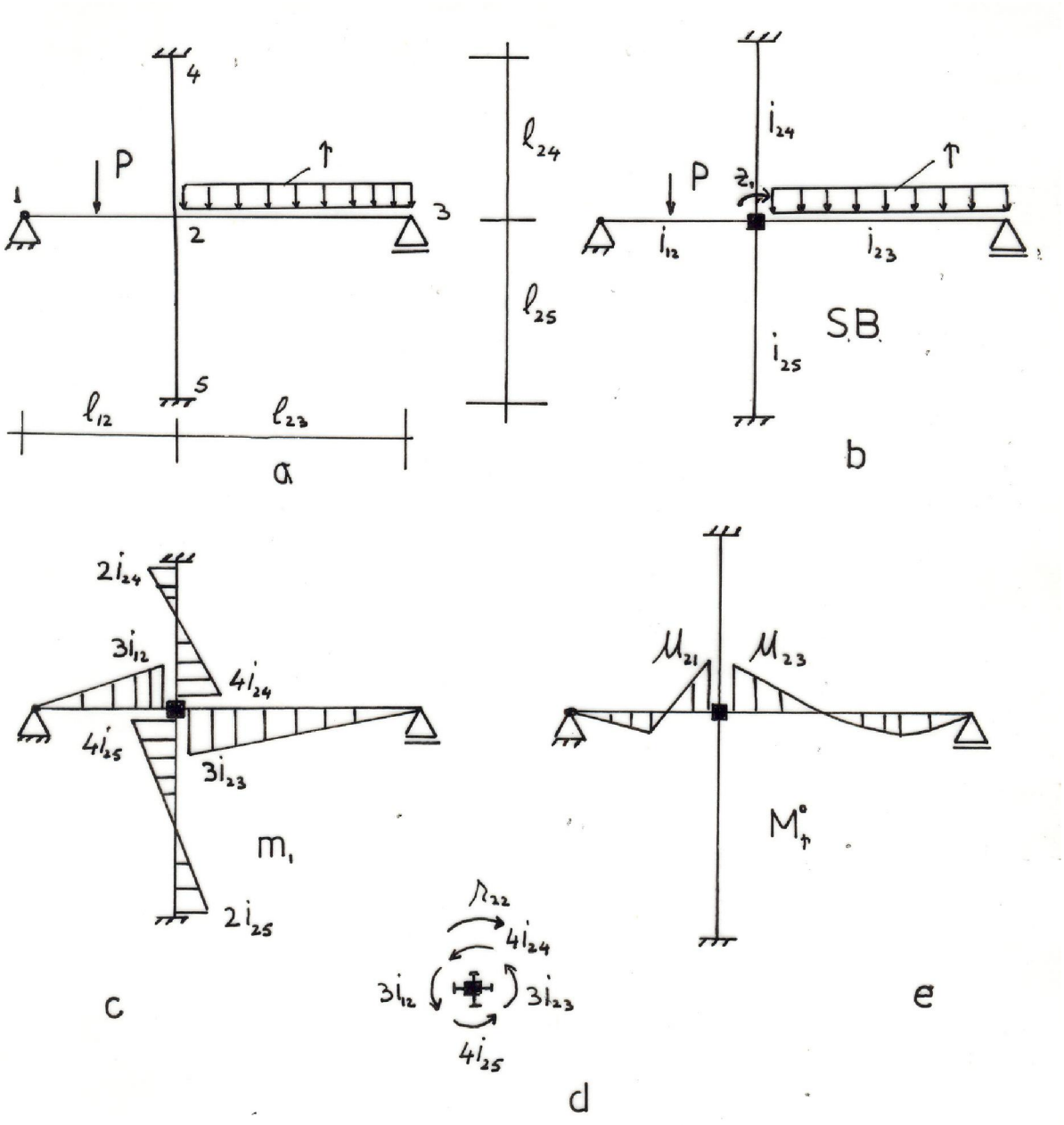


Fig.5.1 a)structură iniţială; b) sistem de bază; c)diagramă unitară; e)M_p^0

unde $\rho_{25},\rho_{24},\rho_{21},\rho_{23}$ reprezintă coeficienţii de rigiditate ai barelor respective, iar $\sum \rho_2$ suma coeficienţilor de rigiditate ai barelor ce formează nodul rigid 2.

Termenul liber, respectiv reacţiunea R_{1p} se determină tot din condiţia de echilibru static al nodului 2, şi anume:

(5.7) K $R_{1p} - m_{21} + m_{23} = 0$

Notînd $m_{23} - m_{21} = \bar{M}_2$,unde $\overline{M}_2$ reprezintă momentul neechilibrat din nodul 2, pentru reacţiunea R_{2p} se obţine forma:

(5.8) K $R_{1p} = -\bar{M}_2$

Cu aceste elemente necunoscuta z_1 are valoarea:

$$(5.9)\ \mathrm{K}\, z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{\bar{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2}$$

Se observă că rotirea z_1 poate fi obţinută fără a mai trasa o diagramă unitară, ci cunoscînd coeficienţii de rigiditate şi momentul neechilibrat (din diagrama M_p^0 care trebuie trasată).

Odată determinată expresia rotirii z_1 se pot obţine momentele încovoietoare la capetele barelor cu relaţii de forma:

$$(5.10)\ \mathrm{K}\, M_{ij} = m_{ij} - 4i_{ij} z_i - 2i_{ij} z_j$$

$$(5.11)\ \mathrm{K}\, M_{ik} = m_{ik} - 3i_{ik} z_i$$

după cum bara este dublu încastrată sau încastrată la un capăt şi articulată la celălalt.

Acesta este de fapt obiectivul final al calculului.

Cu relaţiile (5.10) şi (5.11) se calculează toate momentele din nodul 2:

$$M_{25} = m_{25} - 4i_{25} Z_1 = 0 - 4i_{25} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2}$$

sau

$$M_{25} = -\rho_{25} \frac{\overline{M}_2}{\sum \rho_2} = \mu_{25} \overline{M}_2$$

unde $\mu_{25} = -\frac{\rho_{25}}{\sum \rho_2}$ reprezintă cota parte din momentul neechilibrat $\bar{M}_2$ ce revine barei 2-5 în capătul 2 şi poartă numele de coeficient de distribuţie.

Celelalte momente încovoietoare de la extremităţile barelor au valorile:

$$M_{23} = m_{23} - 3i_{23} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2} = m_{23} + \mu_{23} \overline{M}_2$$

$$M_{24} = 0 - 4i_{24} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2} = \mu_{24} \overline{M}_2$$

$$M_{21} = -m_{21} - 3i_{12} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2} = -m_{21} + \mu_{21} \overline{M}_2$$

$$M_{52} = 0 - 2i_{25} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2} = \frac{1}{2} \mu_{25} \overline{M}_2$$

$$M_{42} = 0 - 2i_{24} \frac{\overline{M}_2}{4i_0 \sum \rho_2} = \frac{1}{2} \mu_{24} \overline{M}_2$$

Se constată că la capătul opus celui ce se roteşte, pe bara dublu încastrată, se obţine un moment încovoietor egal cu jumătate din valoarea celui obţinut la capătul rotit $(\frac{1}{2}\mu_{25}\bar{M}_2, \frac{1}{2}\mu_{24}\bar{M}_2)$

Scriind condiţia ca nodul 2 să fie în echilibru:

$M_{25} + M_{23} + M_{24} + M_{21} = 0$ sau dezvoltat:

$\mu_{25}\overline{M}_2 + m_{23} + \mu_{23}\overline{M}_2 + \mu_{24}\overline{M}_2 - m_{21} + \mu_{21}\overline{M}_2 = 0$

Deoarece $m_{23} - m_{21} = \bar{M}_2$ se obţine:

$\overline{M}_2(\mu_{25} + \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{21}) = m_{21} - m_{23}$

Simplificînd cu $\bar{M}_2$ se constată că:

$\mu_{25} + \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{21} = -1$

suma coeficienţilor de distribuţie dintr-un nod este egală cu minus 1.

Din cele de mai sus se desprind următoarele concluzii:

-coeficienţii de rigiditate se obţin direct funcţie de caracteristicile barelor: lungime, momente de inerţie şi tipul legăturii de la capete. Astfel pentru bara dublu încastrată $\rho_{ij} = \frac{i_{ij}}{i_o}$ iar pentru bara încastrată articulată $\rho_{ik} = 3i_{ik} / 4i_0$.

-coeficienţii de distribuţie se determină pe baza coeficienţilor de rigiditate.

-momentele încovoietoare dintr-un nod se obţin pe baza momentului neechilibrat din nodul respectiv înmulţit cu coeficienţii de distribuţie

-momentul neechilibrat se distribuie barelor ce formează nodul rotit proporţional cu rigiditatea fiecăreia, funcţie de coeficientul de distribuţie al barei.

-în cazul unei bare dublu încastrate, în capătul opus nodului care se roteşte se transmite jumătate din momentul distribuit.

În fiecare nod rigid procesul de echilibrare constă în distribuirea momentului neechilibrat din nodul respectiv şi de transmitere la capetele opuse ale barelor a jumătate din momentul distribuit.

Etapele de calcul sînt:

-stabilirea tipului structurii: structură cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile prin analiza cinematică a structurii auxiliare. Procedeul Cross într-o etapă se aplică pentru structuri cu noduri fixe.

-formarea sistemului de bază prin blocarea nodurilor rigide cu blocaje de nod.

-alegerea rigidităţii de comparaţie şi calculul rigidităţilor practice ale barelor

-calculul coeficienţilor de rigiditate ρ_{ij}

-calculul coeficienţilor de distribuţie μ_{ij}

-se trasează diagrama M_p^0 şi se calculează valorile momentelor de încastrare perfectă.

-formarea schemei de operare

-introducerea în schema de operare a momentelor de încastrare perfectă din M_p^0 şi a coeficienţilor de distribuţie

-momentele de încastrare perfectă se distribuie pe baza coeficienţilor de distribuţie, apoi se transmit la capetele opuse jumătate din valorile distribuite (pe barele dublu încastrate).

Operaţia de distribuire se repetă pînă se obţin valori foarte mici ale momentelor distribuite.

Însumînd valorile din fiecare coloană se obţin momentele încovoietoare finale.

Semnificaţia fizică a procedeului Cross este trecerea treptată a structurii din forma de sistem de bază, cu toate nodurile blocate, în poziţia deformată reală.

Deoarece în fiecare treaptă de echilibrare a nodurilor condiţia de echilibru static este satisfăcută rezultă că echilibrul de nod este o condiţie necesară de verificare a corectitudinii calculului, dar nu şi suficientă. Condiţia de verificare este condiţia de compatibilitate a deformatei cu legăturile. Cel mai simplu este de verificat condiţia ca rotirile secţiunilor dintr-un nod ale barelor ce-l formează să fie egale.

Rotirea secţiunii de capăt a unei bare dublu încastrate se calculează astfel:

(5.11) $$\begin{aligned} M_{ij} &= m_{ij} - 4\rho_{ij}\theta_i - 2\rho_{ij}\theta_j \\ M_{ji} &= m_{ji} - 2\rho_{ij}\theta_i - 4\rho_{ij}\theta_j \end{aligned}$$

deoarece M_{ij} şi M_{ji} sînt momentele finale cunoscute iar m_{ij} şi m_{ji} sînt momentele de încastrare perfectă, de asemenea cunoscute, rezultă că relaţiile de mai sus reprezintă un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, θ_I şi θ_j. Rezolvînd se obţine:

(5.13) K $$\theta_i = \frac{M_{ji}^{*} - 2M_{ij}^{*}}{6\rho_{ij}} \quad \theta_j = \frac{M_{ij}^{*} - 2M_{ji}^{*}}{6\rho_{ij}}$$

unde $M_{ij}^{*} = M_{ij} - m_{ij}$ şi $M_{ji}^{*} = M_{ji} - m_{ji}$

Rotirea secţiunii capătului încastrat pe o bară încastrată şi articulată se obţine prin înlocuirea lui 3i cu 4ρ

$$M_{ik} = m_{ik} - 4\rho_{ik}\theta_i$$

de unde rezultă:

(5.14) K $$\theta_i = -\frac{M_{ik}^{*}}{4\rho_{ik}}$$

cu notaţia $M_{ik}^{*} = M_{ik} - m_{ik}$

Exemplul 5.1: Să se rezolve structura din fig.5.2 folosind procedeul de operare într-o etapă.

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_0 = \frac{EI}{6}$

Calculul rigidităţilor practice: $i_{24} = 2{,}4i_0$; $i_{12} = \frac{EI}{3{,}5}\frac{6}{6} = 1{,}71i_0$; $i_{34} = 2{,}57i_o$

Calculul coeficienţilor de rigiditate şi al coeficienţilor de distribuţie:

Nod 2: $\rho_{21} = 1{,}71; \rho_{24} = 2{,}4$

$\sum \rho_2 = 4{,}11$

$\mu_{21} = -\frac{1{,}71}{4{,}11} = -0{,}416$; $\mu_{24} = -0{,}584$

Nod 4: $\rho_{43} = 2{,}57$; $\rho_{42} = 2{,}4$; $\rho_{45} = \frac{3}{4}\cdot 2 = 1{,}5$

$\sum \rho_4 = 6{,}47$

$\mu_{43} = -0{,}397$; $\mu_{42} = -0{,}371$; $\mu_{45} = -0{,}232$

Schema de operare este prezentată în fig. 5.2d

Ordinea de echilibrare a nodurilor este prezentată în tabelul de mai jos.

Nod	$\overline{M}$
2	3125
4	1025
2	-190
4	55
2	-10

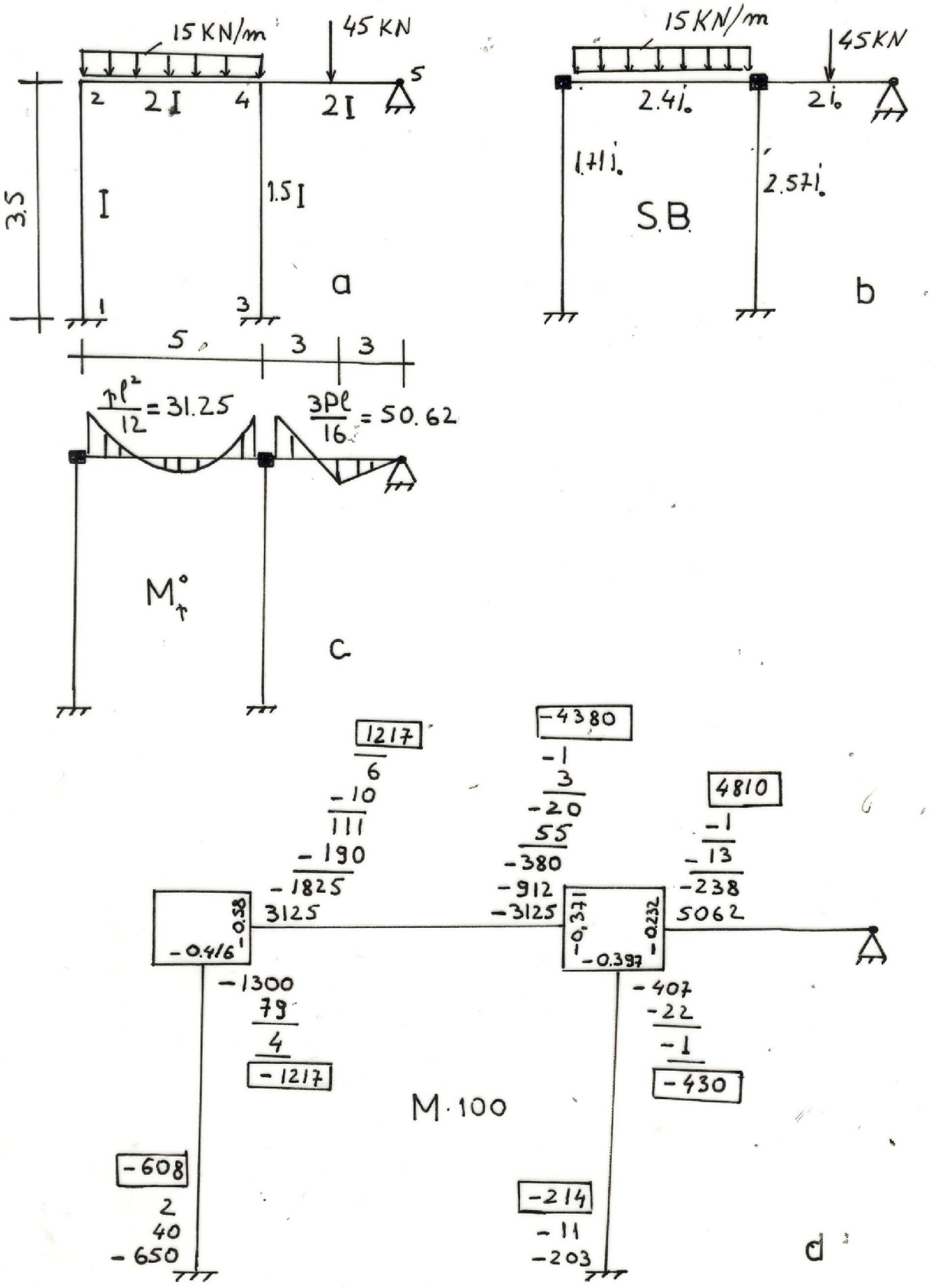


Fig.5.2 a) structură iniţială; b)sistem de bază; c)diagramă M_p^0 ;d) schema de operare

Diagrama finală de moment este prezentată în fig.5.3

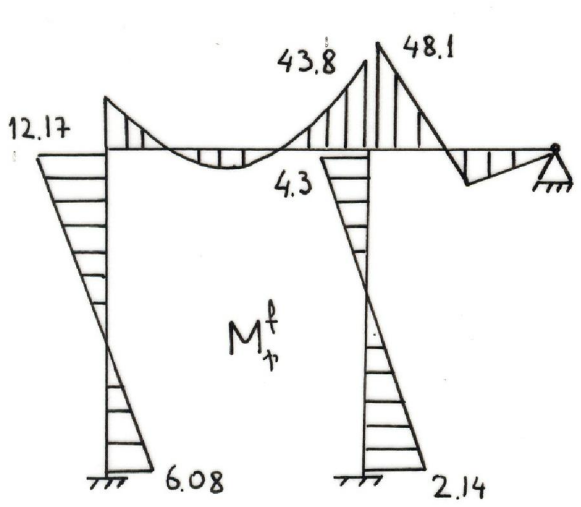


Fig.5.3 Diagrama finală de moment

Exemplul 5.2: Să se traseze diagrama de moment încovoietor pentru structura din figura 5.4 folosind procedeul de operare Cross într-o etapă.

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_o = \frac{EI}{4}$ astfel încît rigidităţile practice devin:

$i_{12} = i_o\,;\ i_{23} = 1{,}33 i_o\,;\ i_{25} = 3 i_o\,;\ i_{35} = 2 i_o$

Calcul coeficienţi de rigiditate şi coeficienţi de distribuţie:

Nod 2:

$\rho_{21} = 1; \rho_{23} = 1{,}33; \rho_{25} = 3$

$\sum \rho_2 = 5{,}33$

$\mu_{21} = -0{,}187; \mu_{23} = -0{,}249; \mu_{25} = -0{,}563$

Nod 3:

$\rho_{32} = 1{,}33; \rho_{35} = 2$

$\sum \rho_2 = 3{,}33$

$\mu_{32} = -0{,}4; \mu_{35} = -0{,}6$

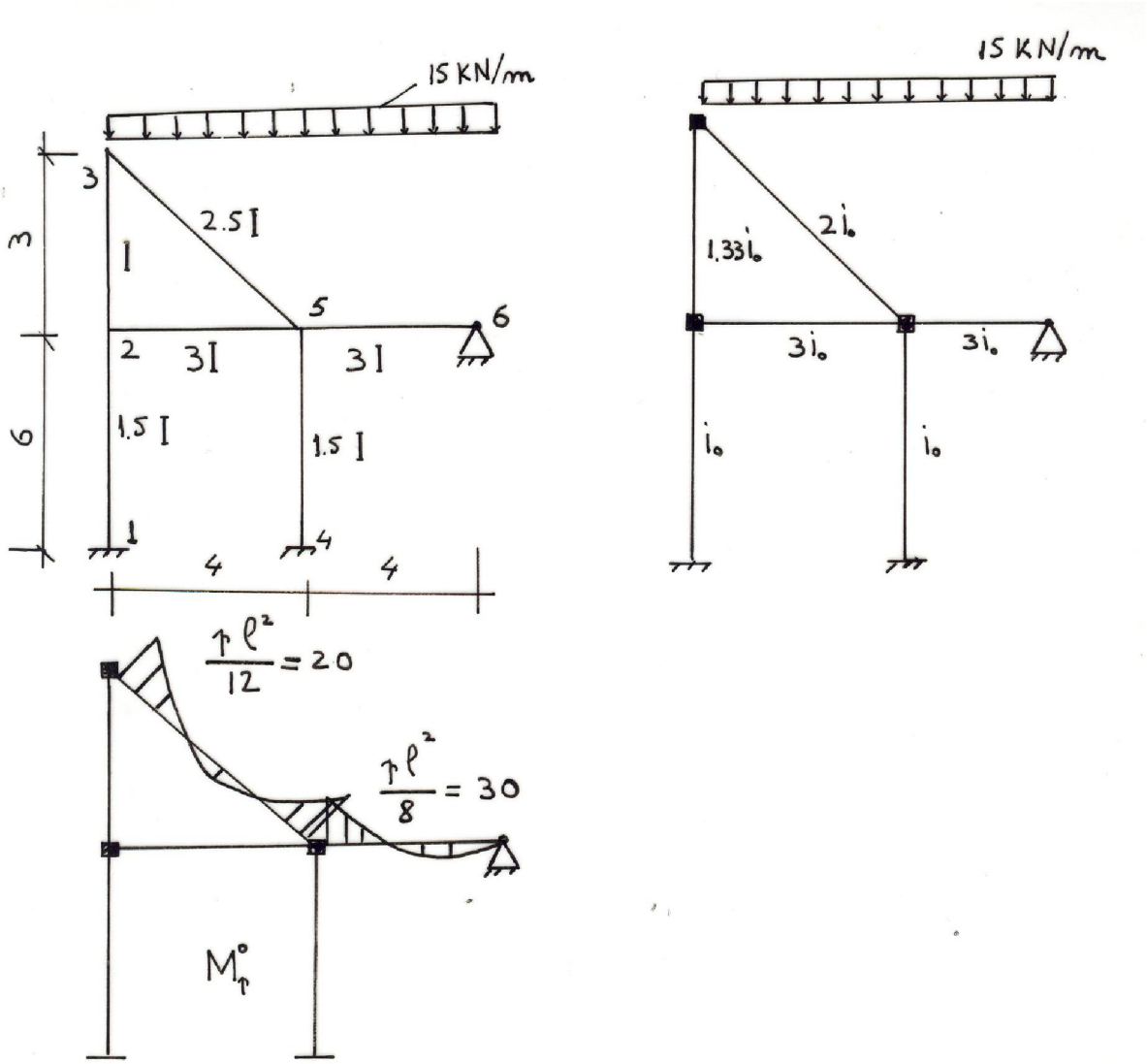


Fig. 5.4 Exemplu calcul folosind procedeul Cross

Nod 5:

$\rho_{54} = 1; \rho_{52} = 3; \rho_{53} = 2; \rho_{56} = \frac{3}{4}3 = 2{,}25$

$\sum \rho_5 = 8{,}25$

$\mu_{54} = -0{,}121; \mu_{52} = -0{,}364; \mu_{53} = -0{,}242; \mu_{56} = -0{,}273$

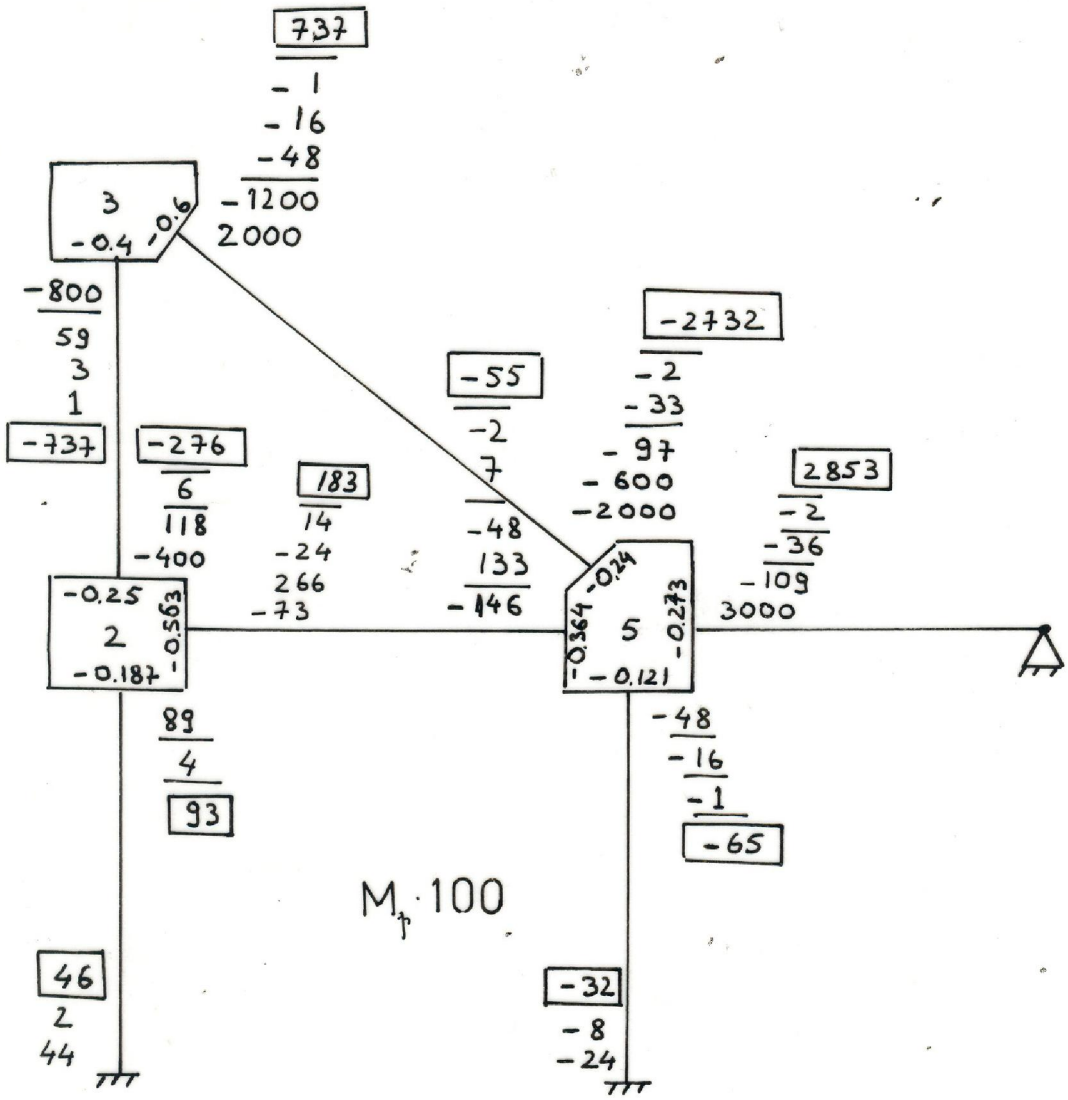


Fig. 5.5 Schema de operare pentru exemplul din fig.5.4

Nod	$\overline{M}$
3	2000
5	400
2	-473
5	133
2	-24
5	7
3	-2

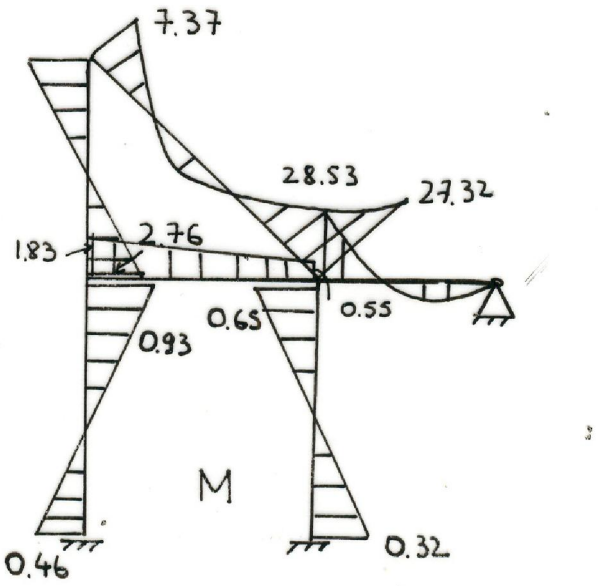


Fig.5.6 Diagrama finală de moment

Exemplul 5.3: Să se traseze diagrama de moment pentru structura din fig.5.7 folosind procedeul Cross într-o etapă.

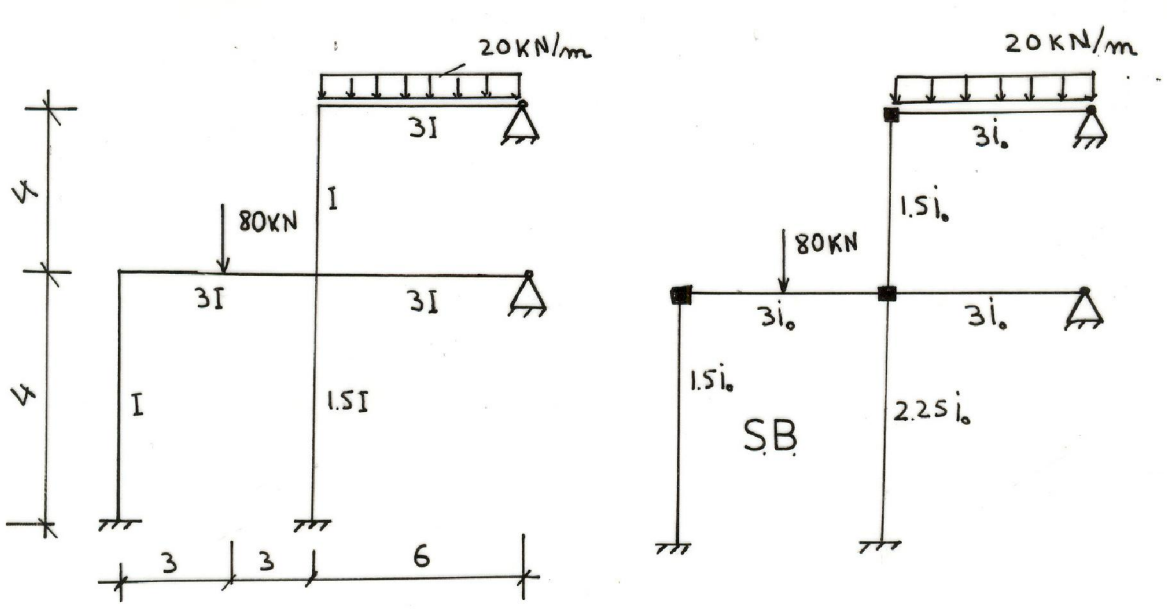


Fig.5.7 Exemplu calcul prin procedul Cross a unei structuri cu noduri fixe (structură iniţială şi S.B.)

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_o = \frac{EI}{6}$ astfel încît rigidităţile practice devin:

$i_{12} = i_{45} = \frac{EI}{4} \cdot \frac{6}{6} = 1{,}5i_o ; i_{34} = 2{,}25i_0$

Calcul coeficienţi de rigiditate şi coeficienţi de distribuţie:

Nod 2:

$\rho_{21} = 1{,}5; \rho_{24} = 3$

$\sum \rho_2 = 4{,}5$

$\mu_{21} = -0{,}333; \mu_{24} = -0{,}667$

Nod 4:

$\rho_{42} = 3; \rho_{46} = 3 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}25; \rho_{43} = 2{,}25; \rho_{45} = 1{,}5$

$\sum \rho_4 = 9$

$\mu_{46} = -0{,}25; \mu_{42} = -0{,}333; \mu_{43} = -0{,}25; \mu_{45} = -0{,}167$

Nod 5:

$\rho_{54} = 1{,}5; \rho_{57} = \frac{3}{4} \cdot 3 = 2{,}25$

$\sum \rho_5 = 3{,}75$

$\mu_{54} = -0{,}4; \mu_{57} = -0{,}6$

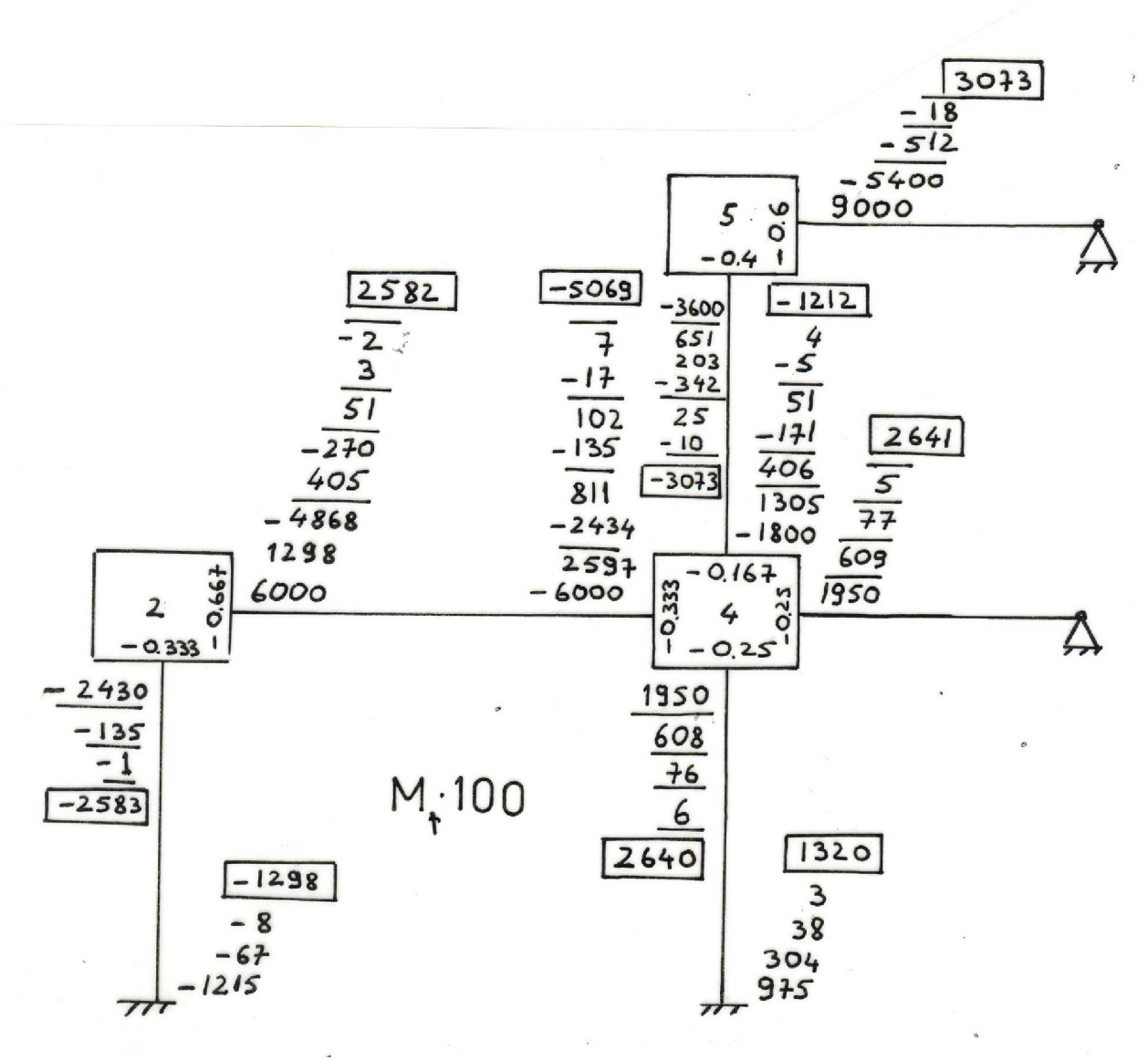


Fig.5.8 Schema de operare prin procedeul Cross

Nod	$\overline{M}$
5	9000
4	-7800
2	7218
5	854
4	306

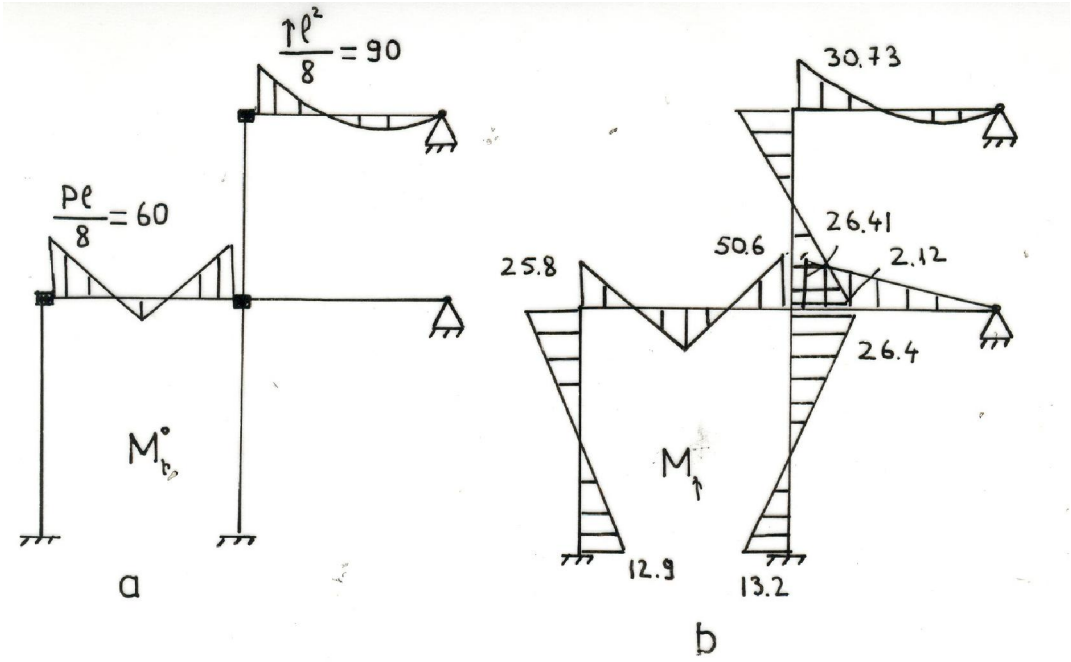


Fig.5.9 Diagrama M_p^0 şi diagrama finală de moment

CAP.6 PROCEDEUL DE OPERARE ÎN DOUĂ ETAPE

Procedeul Cross a fost demonstrat şi se aplică la cadre cu noduri fixe. Acest procedeu poate fi folosit şi pentru cadre cu noduri deplasabile însă de fapt se rezolvă prin procedeul Cross cadrul cu noduri fixe obţinut din cadrul real prin blocarea gradelor de libertate elastice care definesc translaţiile nodurilor.

Dificultăţile legate de rezolvarea directă a ecuaţiilor de condiţie se accentuează la cadrele multiple cu noduri deplasabile, datorită prezenţei gradelor de libertate elastică ce introduc noi necunoscute. S-a căutat deci să se utilizeze şi aici rezolvarea prin aproximaţii succesive, ale cărei avantaje au ieşit în evidenţă la studiul cadrelor cu noduri fixe: operare sistematizată pe scheme de calcul şi eliminarea necesităţii de a mai scrie explicit ecuaţiile de condiţie.

La cadrele cu noduri deplasabile, prezenţa gradelor de libertate introduce noi termeni în ecuaţiile de nod şi adaugă ecuaţiile de grad de libertate.

Ca semnificaţie fizică, rezolvarea directă a sistemului ecuaţiilor de condiţie ar corespunde trecerii de la sistemul de bază la poziţia finală deformată prin ridicarea concomitentă a tuturor blocărilor. Rezolvarea prin iteraţie constă în a imagina că această trecere se face treptat, prin ridicare şi restabilire succesivă de blocări. Convergenţa va fi cu atît mai bună cu cît prin succesiunea deblocărilor efectuate se asigură trecerea mai rapidă a structurii de la poziţia iniţială la poziţia finală deformată.

Rezolvarea se face în două etape, operînd mereu asupra cadrului admis cu noduri fixe. Cadrul cu noduri fixe, pe care se conduce tot calculul, reprezintă un sistem de bază geometric nedeterminat.

Calculul începe cu rezolvarea sistemului de bază încărcat cu forţe, apoi rezolvarea sistemului de bază încărcat cu translaţiile pe direcţiile gradelor de libertate elastică. Această rezolvare se efectuează prin iteraţie (procedeul Cross).

Rezultatele astfel obţinute sînt apoi utilizate la rezolvarea cadrului dat cu ajutorul sistemului de bază geometric nedeterminat, prin aplicarea ecuaţiilor de condiţie corespunzătoare, în care ca necunoscute apar numai parametrii Z_1 , Z_2 ai gradelor de libertate.

În prima etapă, se aplică pe cadrul cu noduri fixe (S.B.) încărcările exterioare date obţinîndu-se diagrama M_p^0. Această diagramă se echilibrează ulterior prin procedeul Cross obţinîndu-se diagrama M_p^f.

Acelaşi sistem de bază se încarcă apoi,pe rînd, cu translaţiile $Z_1=1$ şi $Z_2=1$ pe direcţiile gradelor de libertate elastică. Barele se deformează corespunzător rotirii lor, apărînd momente de încastrare perfectă, care se determină cu formulele stabilite. În acest mod se obţin diagramele m_1 şi m_2.

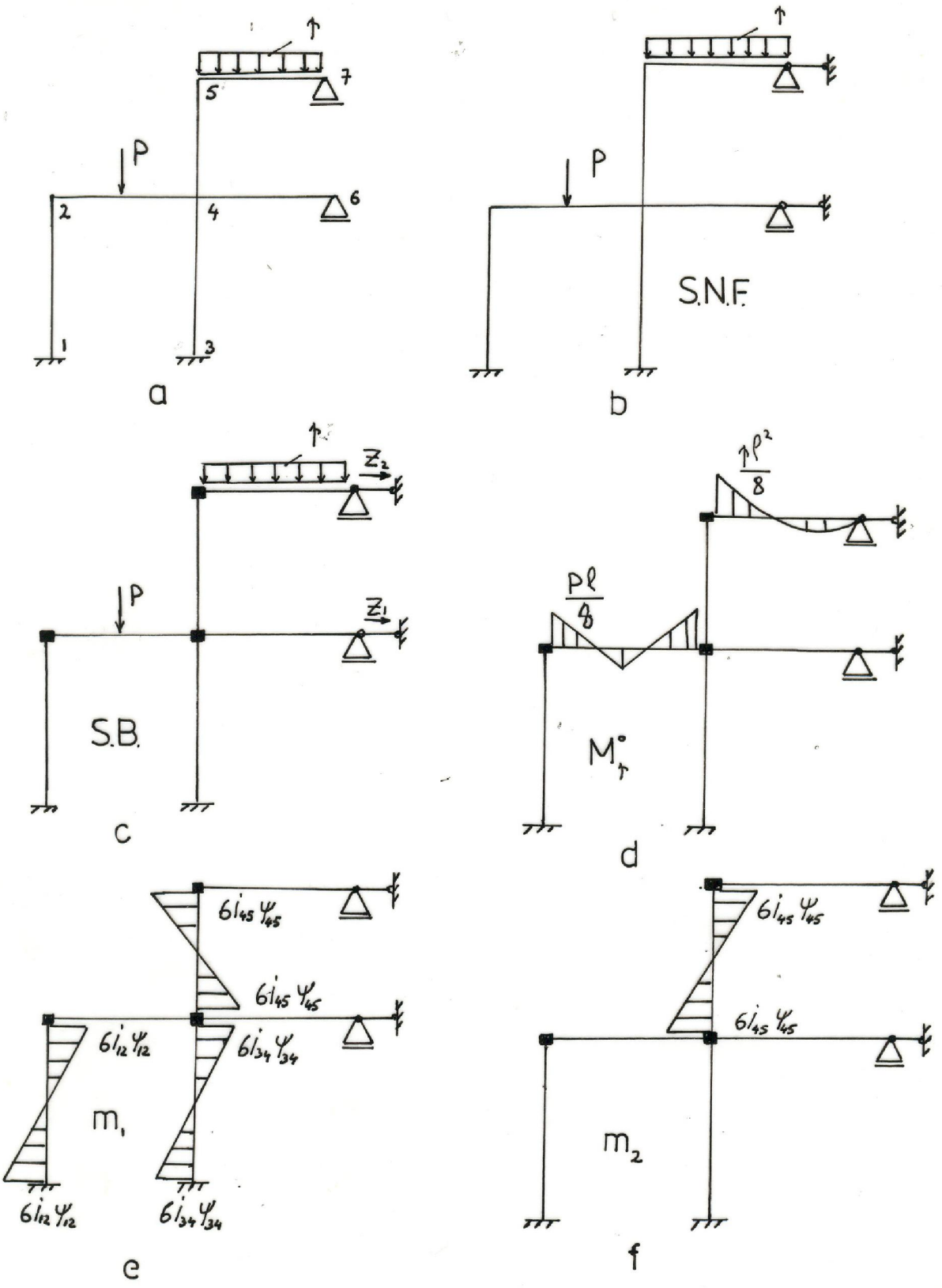


Figura 6.1 Cadru real cu noduri deplasabile. Structură cu noduri fixe obţinută prin introducerea de legături de grad de libertate elastică. Diagramă M_p^0 şi diagrame unitare m_1 şi m_2

Diagramele m_1 şi m_2 se echilibrează prin Cross şi se obţin diagramele $m_1^{\,f}$ şi $m_2^{\,f}$

Se trece la **a doua etapă** în care se efectuează determinarea mărimii parametrilor Z_1 ,Z_2 ai gradelor de libertate. În acest scop, se consideră schema articulată a cadrului, încărcată cu sarcini şi cu momentele totale de capăt. În situaţia reală de echilibru, reacţiunile din blocările gradelor de libertate nu mai intervin. Deci reacţiunile $R_1 = 0$ şi $R_2 = 0$

Echilibrul structurii auxiliare se exprimă folosind principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru uşurinţa raţionamentului se consideră structura cu noduri deplasabile din fig. 6.1a. Se blochează gradele de libertate cu legăturile corespunzătoare şi se obţine o structură cu noduri fixe.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie, pentru structura analizată, are forma:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Spre exemplu coeficientul r_{11} se determină încărcînd schema articulată a cadrului cu momentele de capăt din diagrama $m_1^{\,f}$ şi cu reacţiunea necunoscută din legătura de grad de libertate (r_{11}) , apoi se exprimă condiţia ca lucrul mecanic virtual să fie egal cu zero.

Termenul liber R_{1p} se determină, încărcînd schema articulată a cadrului cu momentele de capăt din diagrama $M_p^{\,f}$ şi cu forţele exterioare. Termenul R_{1p} se obţine punînd ulterior condiţia ca lucrul mecanic virtual să fie egal cu zero.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se determină deplasările Z_1 şi Z_2 .

Diagrama finală pe cadrul cu noduri deplasabile se obţine prin suprapunerea diagramelor din cele trei încărcări, forţe exterioare şi grade de libertate elastice Z_1 şi Z_2 necunoscute, folosind relaţia:

$$\text{K}\, M = M_p^{\,f} + m_1^{\,f} Z_1 + m_2^{\,f} Z_2 \qquad (6.2)$$

Observaţii:

Acest procedeu este uşor de aplicat pentru structuri cu un număr redus de necunoscute (1-3 necunoscute). În cazul existenţei mai multor ipoteze de încărcare calculul se simplifică în sensul că echilibrarea diagramelor unitare se face o singură dată.

În cazul în care structura reală este încărcată cu forţe aplicate în noduri diagrama $M_p^{\,0} = 0$ şi deci şi $M_p^{\,f} = 0$ aşa încît termenii liberi se calculează direct, ca efect al forţelor date.

Exemplul 6.1: Să se determine diagrama de moment pentru structura din figura 6.2a folosind procedeul de operare în două etape.

1. Într-o primă fază se crează structura auxiliară (fig.6.2b) pentru determinarea numărului de grade de libertate cinematică $W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1 \rightarrow SND$

Structura cu noduri fixe se obţine blocînd deplasările pe direcţiile gradelor de libertate elastică.

Sistemul de bază se obţine introducînd pe structura cu noduri fixe şi blocajele de rotaţii pentru nodurile rigide.

Calculul rigidităţilor practice:

$$i_o = \frac{EI}{4} \quad i_{34} = \frac{3EI}{6} \cdot \frac{4}{4} = 2i_o \quad i_{42} = \frac{2{,}5EI}{5} \cdot \frac{4}{4} = 2i_0 \quad i_{56} = \frac{4EI}{9} \cdot \frac{4}{4} = 1{,}78i_0$$

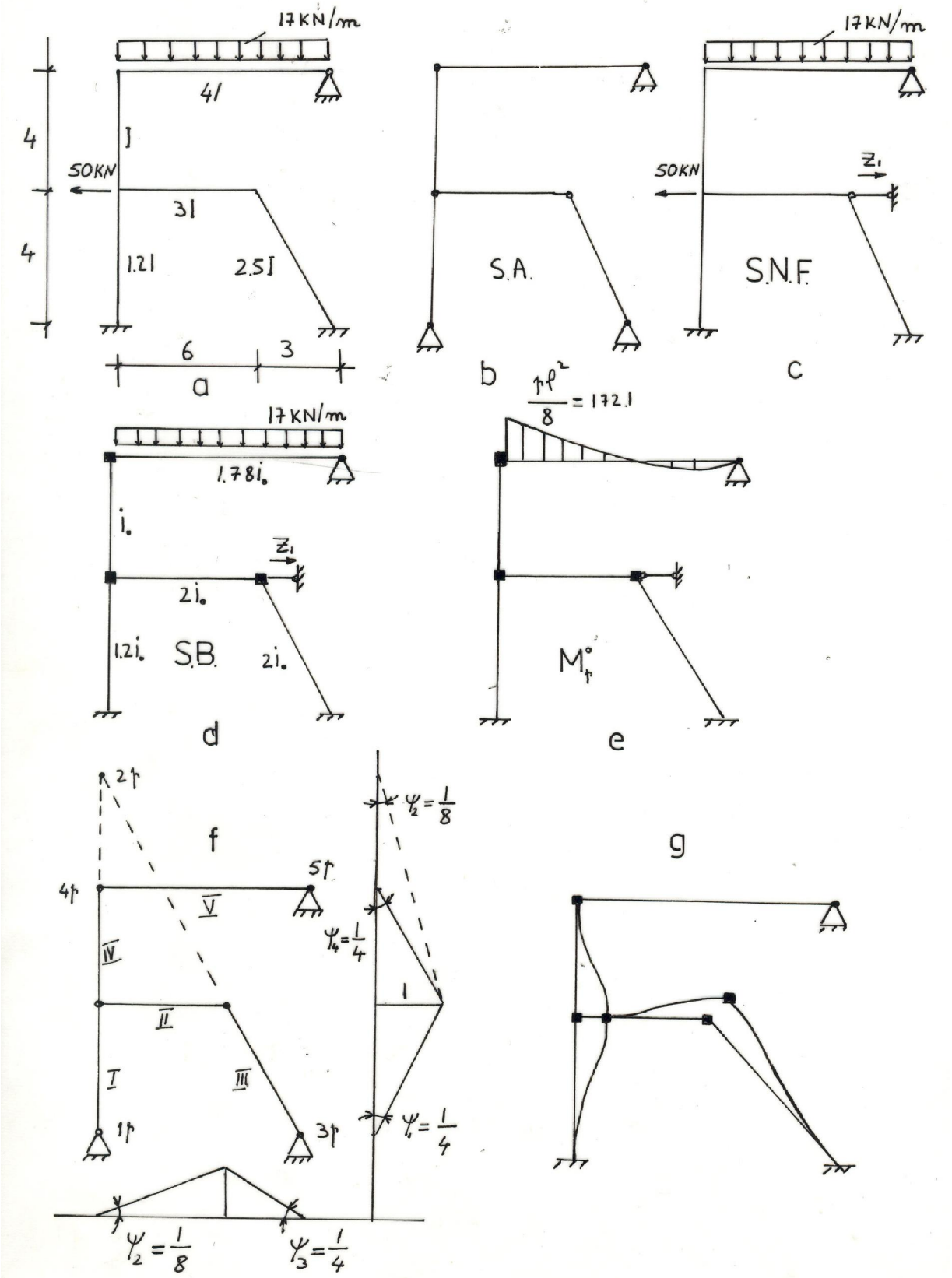


Figura 6.2 a: structura iniţială, b: structura auxiliară, c:structură cu noduri fixe; d: sistem de bază; e: diagrama de moment M_p^o; f: diagrama de deplasări virtuale, g: forma deformată pentru $Z_1=1$

Diagrama M_p^o prezentată în figura 6.2d este obţinută prin încărcarea sistemului de bază cu sarcinile exterioare.

Calculul coeficienţilor de rigiditate şi ai coeficienţilor de distribuţie:

Nod 3:

$\rho_{31} = 1{,}2 \qquad \mu_{31} = -0{,}286$

$\rho_{34} = 2 \qquad \mu_{34} = -0{,}476$

$\rho_{35} = 1 \qquad \mu_{35} = -0{,}238$

$\sum \rho_3 = 4{,}2$

Nod 4:

$\rho_{42} = 2 \qquad \mu_{42} = -0{,}500$

$\rho_{43} = 2 \qquad \mu_{43} = -0{,}500$

$\sum \rho_4 = 4$

Nod 5:

$\rho_{53} = 1 \qquad \mu_{53} = -0{,}428$

$\rho_{56} = \frac{3}{4} 1{,}78 = 1{,}335 \qquad \mu_{56} = -0{,}572$

$\sum \rho_5 = 2{,}335$

Diagrama unitară se echilibrează prin procedeul Cross obţinînd m_1^f. La fel se procedează şi cu M_p^o şi se obţine M_p^f

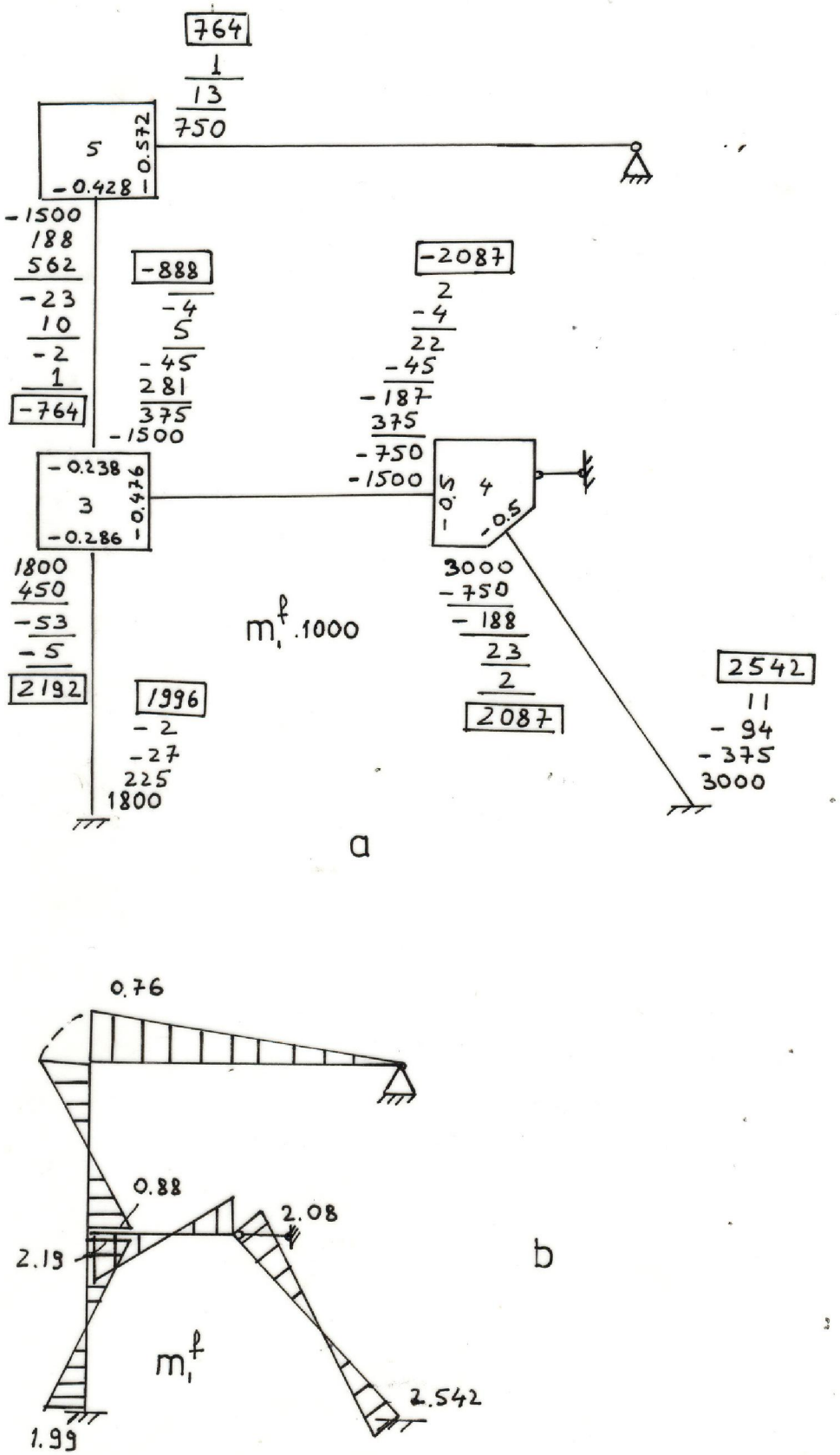


Figura 6.3 Echilibrarea prin procedeul Cross a diagramei m_1 şi obţinerea diagramei m_1^f

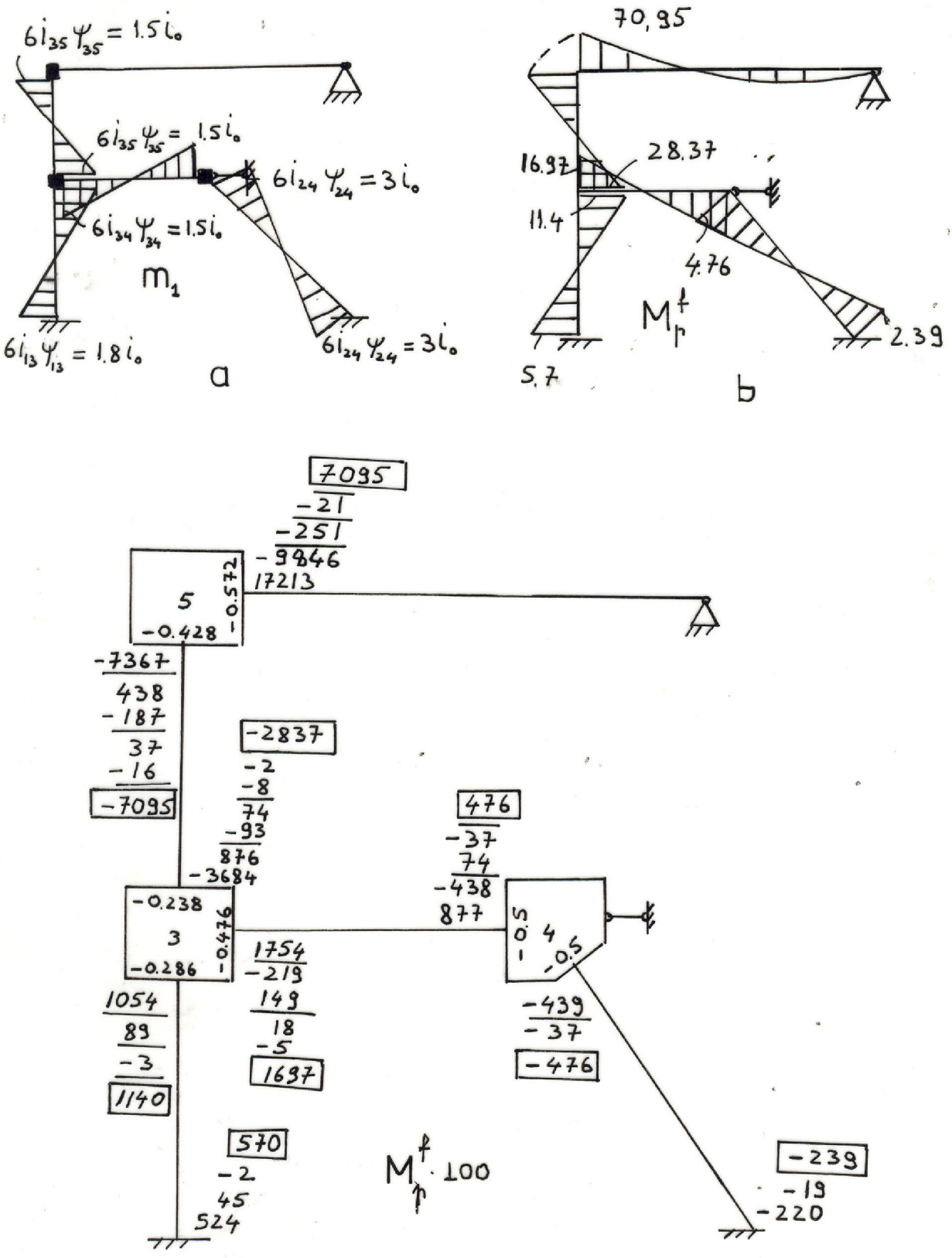


Figura 6.4 Echilibrarea prin procedeul Cross a diagramei M_p^o

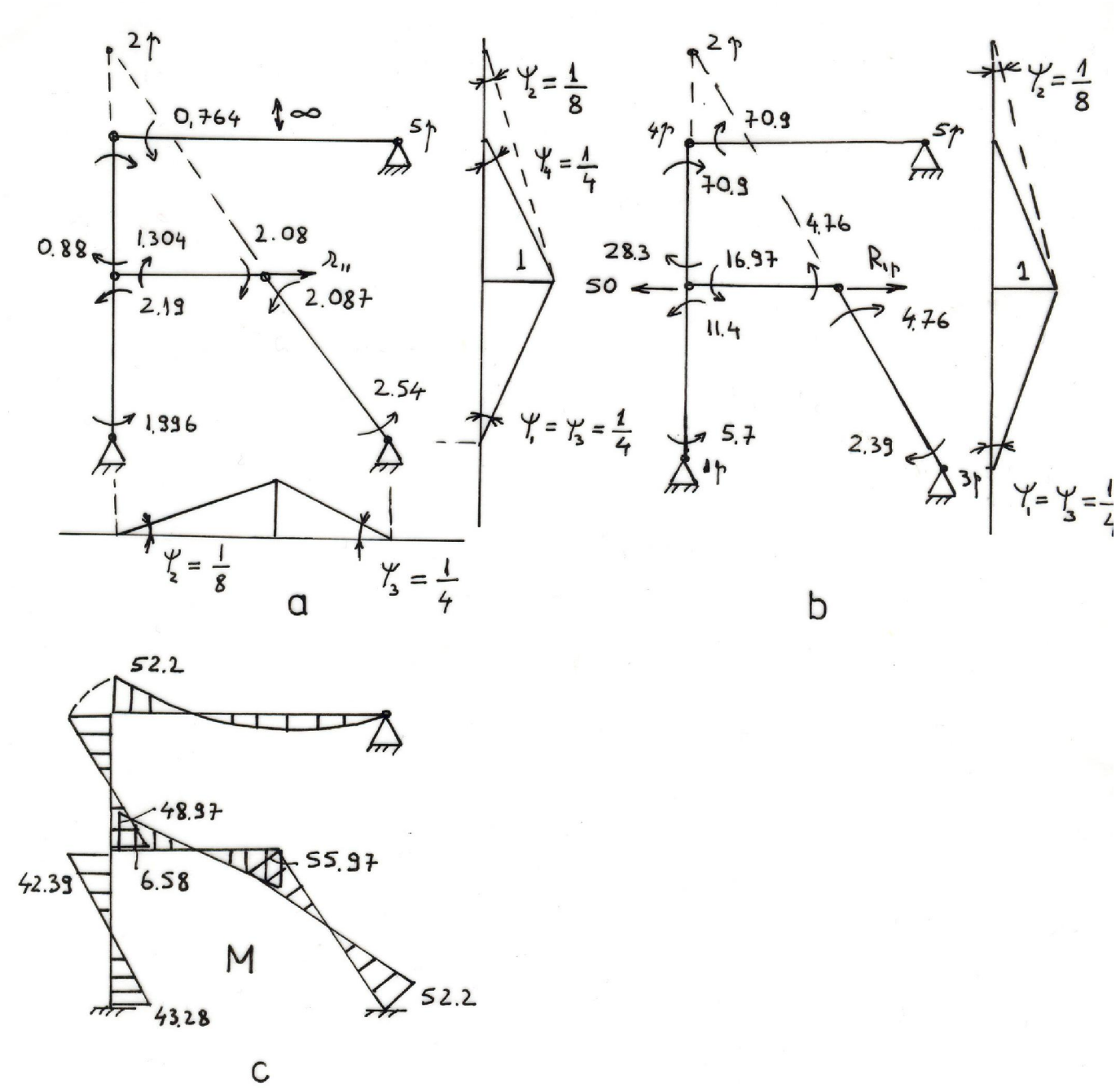


Figura 6.5 a: obţinerea reacţiunii r_{11} folosind principiul lucrului mecanic virtual; b: obţinerea reacţiunii R_{1p}; c: diagrama finală

$$r_{11} \cdot 1 - \frac{1}{4}(1{,}996 + 2{,}194 + 2{,}542 + 2{,}087) - \frac{1}{8}(1{,}304 + 2{,}087) - \frac{1}{4}(0{,}888 + 0{,}764) = 0 \rightarrow r_{11} = 3{,}04$$

$$R_{1p}\cdot 1-50\cdot 1-\frac{1}{4}(5{,}7+11{,}4)+\frac{1}{4}(2{,}39+4{,}76)+\frac{1}{8}(16{,}97+4{,}76)-\frac{1}{4}(28{,}37+70{,}95)\rightarrow R_{1p}=74{,}6$$

Ecuaţia de condiţie are forma:

$$r_{11}Z_1+R_{1p}=0\rightarrow Z_1=-\frac{R_{1p}}{r_{11}}=-\frac{74{,}6}{3{,}04}=-24{,}54$$

Diagrama finală se obţine prin suprapunere de efecte:

$M_{13}=-5{,}7-1{,}996(24{,}54)=43{,}28$

$M_{31}=-11{,}4-2{,}192\cdot(-24{,}54)=42{,}39$

$M_{34}=-16{,}97+1{,}304\cdot(24{,}54)=-48{,}97$

$M_{43}=-4{,}75+2{,}08\cdot(-24{,}54)=-55{,}97$

$M_{24}=2{,}39-2{,}54\cdot(-24{,}54)=64{,}77$

$M_{42}=4{,}76-2{,}08\cdot(-24{,}54)=55{,}97$

$M_{53}=70{,}95+0{,}764\cdot(24{,}54)=52{,}2$

$M_{56}=-70{,}95-0{,}764\cdot(-24{,}54)=-52{,}2$

Exemplul 6.2: Să se rezolve structura din figura 6.6a utilizînd procedeul de operare în 2 etape.

Structura din fig.6.6a este o structură simetrică încărcată simetric, iar pentru simplificarea rezolvării se va lucra pe semistructură obţinută prin introducerea în axa de simetrie a unei încastrări glisante (fig.6.6b). Pentru determinarea numărului de grade de libertate elastice se crează structura auxiliară (fig.6.6c) care se analizează din punct de vedere cinematic. $w=3\cdot 4-2\cdot 5-1=1$. În cazul de faţă există un singur grad de libertate elastică. Sistemul de bază (fig.6.6d) se obţine prin blocarea rotaţiei nodurilor rigide şi blocarea deplasării pe direcţia gradului de libertate elastică. Rezolvarea se face folosind procedeul de operare Cross în 2 etape, deci necunoscută va fi doar deplasarea pe direcţia gradului de libertate elastică.

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_o=\frac{EI}{6}$, astfel încît rigidităţile practice devin: $i_{34}=1{,}5i_o$;

$i_{45}=\frac{2{,}5EI}{5}\cdot\frac{6}{6}=3i_0$. Valorile rigidităţilor practice sînt figurate pe sistemul de bază (fig.6.6d).

Următoarea etapă constă în calculul coeficienţilor de rigiditate şi ai coeficienţilor de distribuţie:

Nod 2:

$\rho_{21}=1;\rho_{23}=3$

$\sum\rho_2=4$

$\mu_{21}=-0{,}25\ \mu_{23}=-0{,}75$

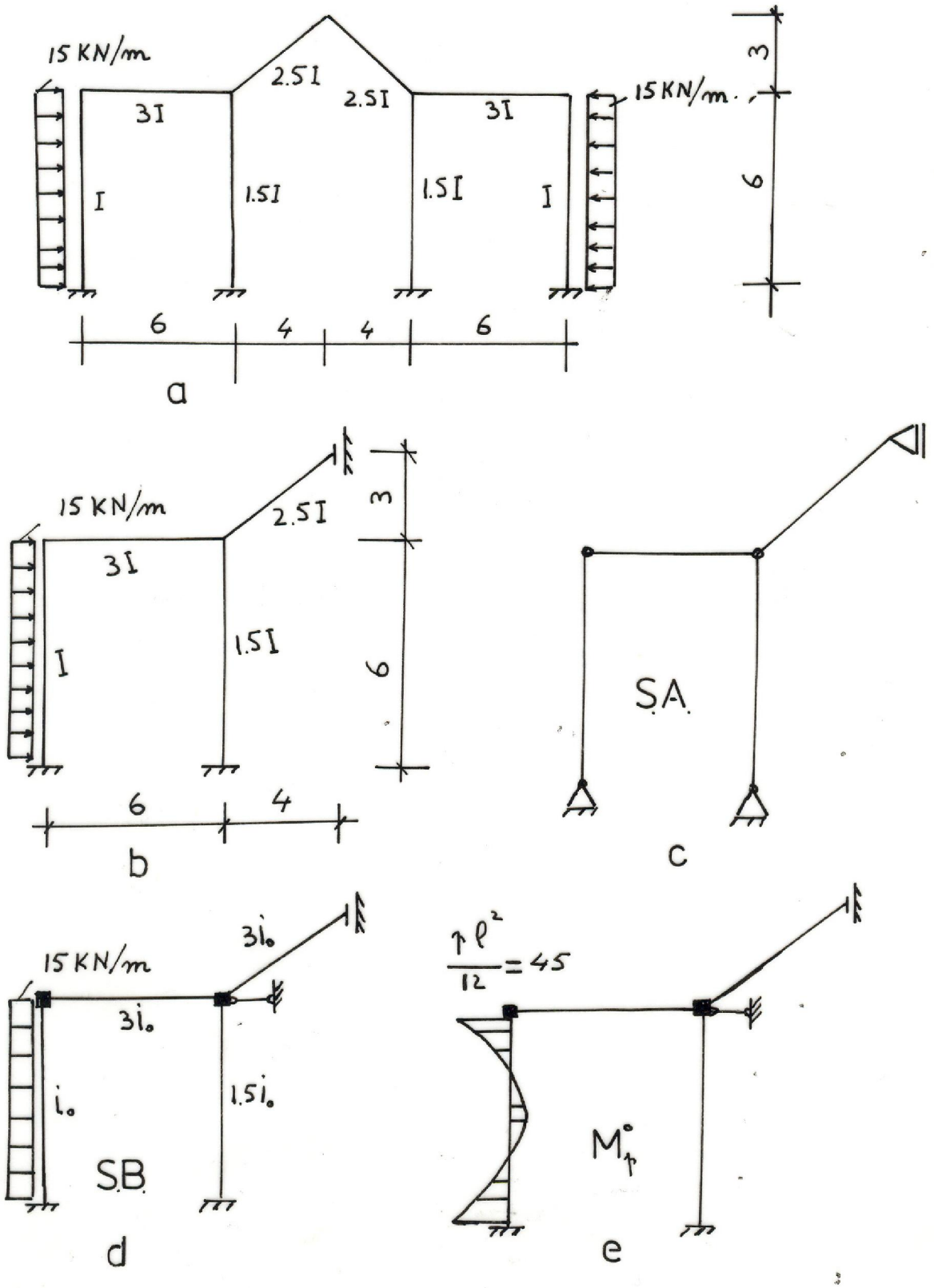
Nod 4:

$\rho_{42}=3;\rho_{43}=1{,}5;\rho_{45}=3$

$\sum\rho_4=7{,}5$

$\mu_{42}=-0{,}4;\mu_{43}=-0{,}2;\mu_{45}=-0{,}4$

Diagrama M_p^0 (fig.6.6e)se echilibrează prin procedeul Cross, schema de operare fiind prezentată în fig.6.7c.



Fg.6.6 a. structura simetrică încărcată simetric; b. semistructura; c. structură auxiliară; d. sistem de bază; e. diagrama M_p^0

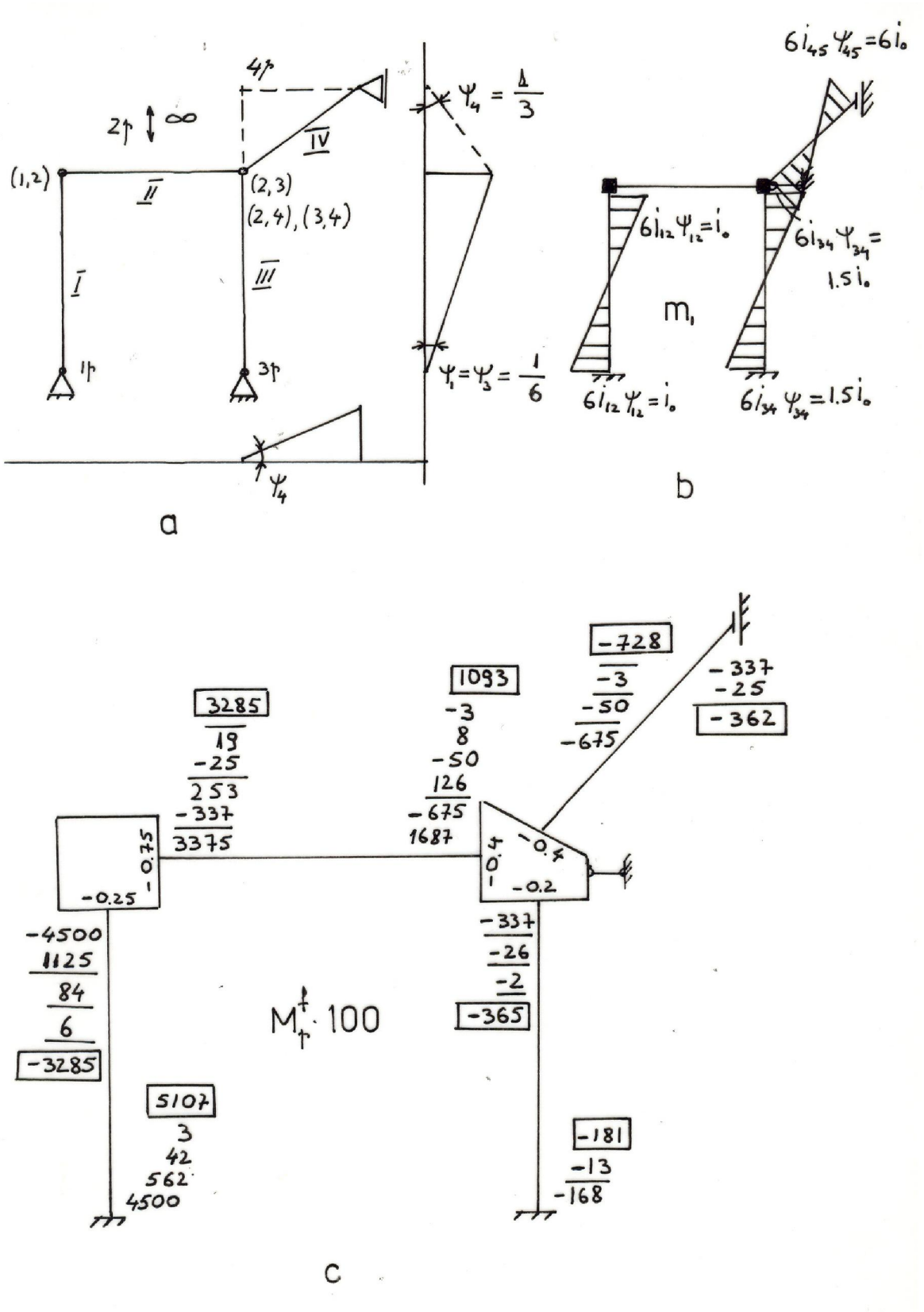


Fig.6.7 a. diagramă de deplasări virtuale; b. diagramă de momente unitară ; c. schema de operare

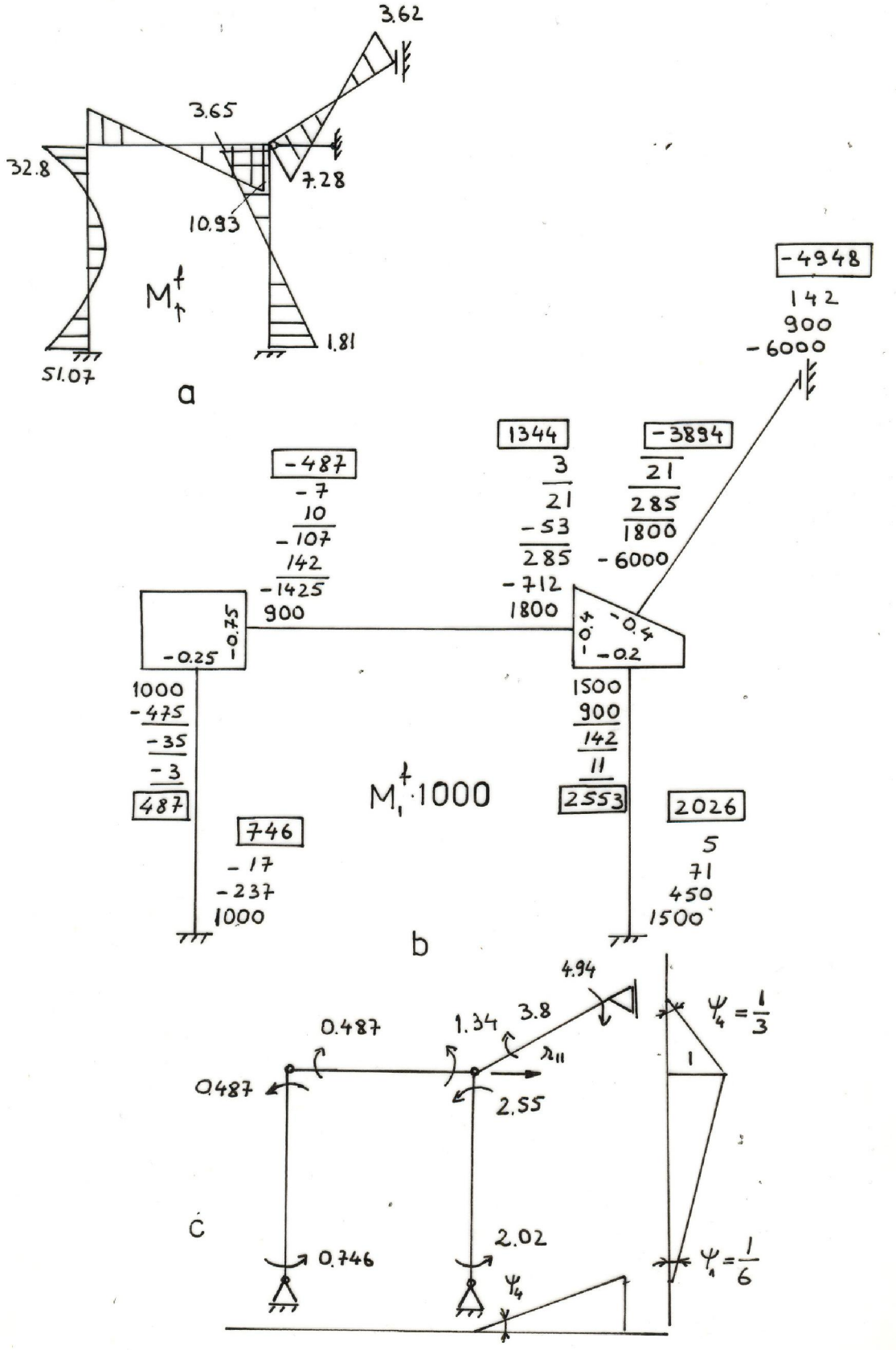


Fig.6.8 a. diagramă M_p^f echilibrată; b. schema de operare pentru diagrama $m_{1;}$c.calcul reacţiune r_{11}

În figura 6.7b este prezentată diagrama unitară obţinută dintr-o translaţie unitară pe direcţia gradului de libertate elastică Această diagramă se echilibrează prin procedeul Cross , schema de operare fiind prezentată în fig.6.8b.

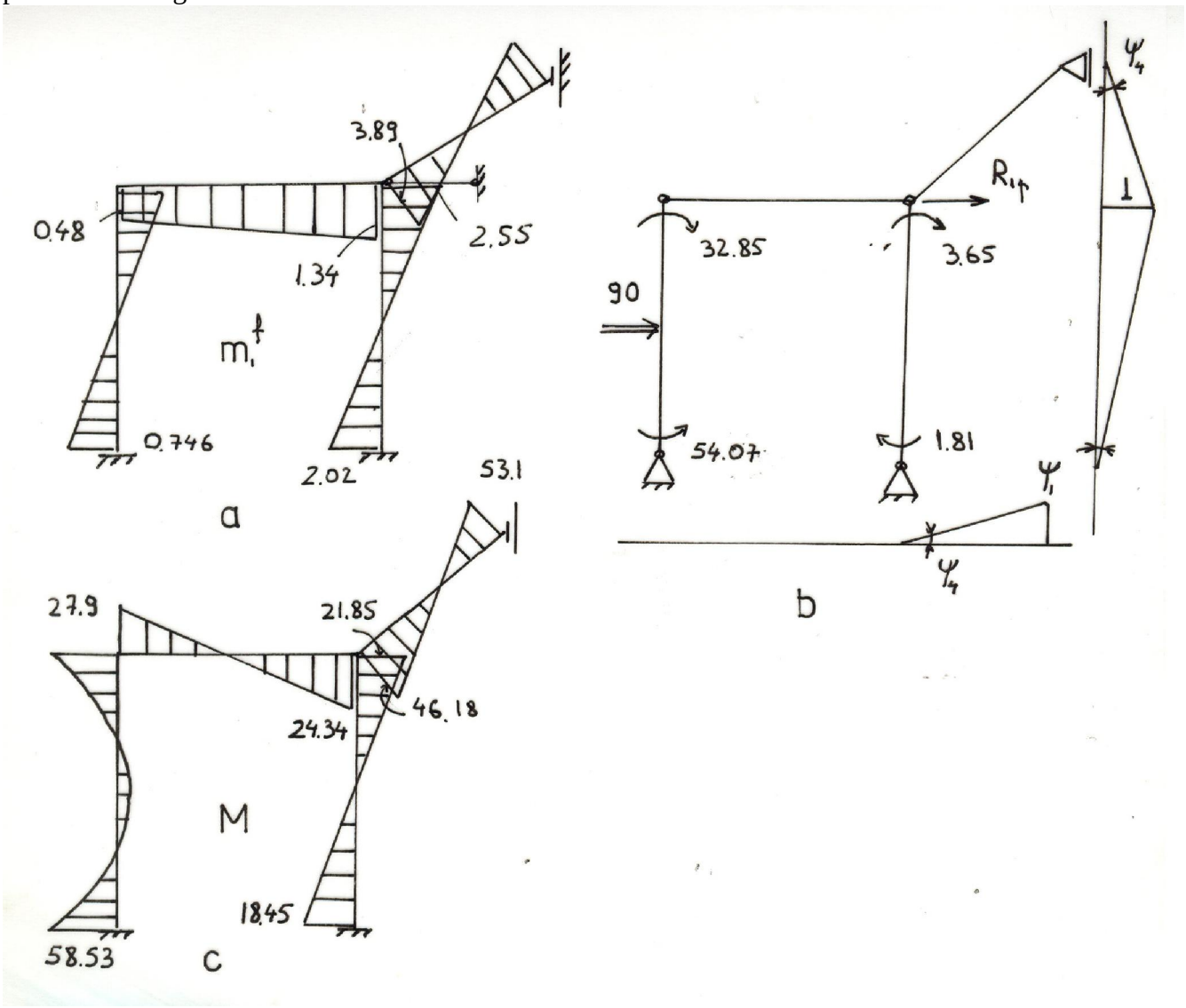


Fig.6.9 a. diagramă $m_1$echilibată; b.obţinerea reacţiunii R_{1p} folosind principiul lucrului mecanic virtual; c. diagramă finală de moment

Ecuaţia de condiţie are forma: $r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$.

$$r_{11} \cdot 1 - \frac{1}{6}(0{,}746 + 0{,}487) - \frac{1}{3}(3{,}89 + 4{,}948) - \frac{1}{6}(2.02 + 2{,}55) = 0$$

$$r_{11} = 3{,}9$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 98 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{6}(32{,}85 - 54{,}07) + \frac{1}{6}(1{,}81 + 3{,}65) - \frac{1}{3}(7{,}28 + 3{,}62) = 0$$

$$R_{1p} = 39$$

$$Z_1 = \frac{39}{3{,}9} = 10$$

Valorile pentru diagrama finală de moment se obţin prin suprapunere de efecte:

$$M_{12} = -51{,}07 - 0{,}746 \cdot 10 = -58{,}53$$
$$M_{21} = 32{,}85 - 0{,}487 \cdot 10 = 27{,}98$$
$$M_{24} = -32{,}85 + 0{,}487 \cdot 10 = -27{,}98$$
$$M_{42} = -10{,}93 - 1{,}34 \cdot 10 = -24{,}34$$
$$M_{43} = 3{,}65 - 2{,}55 \cdot 10 = 21{,}85$$
$$M_{34} = 1{,}81 - 2{,}026 \cdot 10 = 18{,}45$$
$$M_{45} = 7{,}28 + 3{,}89 \cdot 10 = 46{,}1$$
$$M_{54} = 3{,}62 + 4{,}94 \cdot 10 = 53{,}1$$

CAP.7 CALCUL NELINIAR ELASTIC ŞI NELINIAR ELASTO-PLASTIC

7.1 Introducere

În ipoteza unui calcul liniar elastic fenomenul de încărcare descărcare are loc fără disipare de energie, iar prin descărcare structura revine în poziţia iniţială. În aceste condiţii structura de rezistenţă se consideră un sistem conservativ.

Anumite solicitări au demonstrat faptul că există cazuri în care în unele secţiuni se depăşeşte limita de comportare elastică a materialului, apărînd astfel deformaţii remanente.

În general acţiunea seismică reprezintă solicitarea care generează eforturi alternante în structură. Datorită faptului că în anumite secţiuni materialul a intrat în curgere, modelarea printr-un calcul liniar elastic nu mai este posibilă. Devine astfel imperios necesar folosirea unor noi modele de comportare a materialului, care să reflecte cît mai fidel comportarea acestuia.

Astfel, calculul în domeniul elasto-plastic îşi propune să permită determinarea capacităţii portante a structurii, respectiv valoarea forţelor la care se atinge limita de comportare a structurii. Modelarea comportării materialului se face prin definirea unei legi constitutive corespunzătoare fiecărui model: liniar elastic, elastic neliniar, elasto-plastic, vîsco-plastic, vîsco-elastic.

Legea constitutivă exprimă legătura dintre vectorul eforturilor unitare $\{\sigma\}$ şi vectorul deformaţiilor specifice $\{\varepsilon\}$. Pentru comoditatea reprezentării grafice a relaţiei efort-deformaţie se va considera cazul comportării uni-axiale, descrisă de efortul σ şi deformaţia specifică ε. În cazul comportării bi sau tridimensionale, simbolul σ poate fi considerat ca fiind unul dintre eforturile octaedrale:

$$(7.1)\,\mathrm{K}\quad \sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1$$

$$(7.2)\,\mathrm{K}\quad \tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 + \sigma_1)^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}I_2^{\,1/2}$$

iar simbolul ε poate fi considerat ca fiind deformaţia specifică principală ε_1 sau deformaţia specifică generalizată:

$$(7.3)\,\mathrm{K}\quad \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_m)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

unde $(7.4)\,\mathrm{K}\quad \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_v$. În relaţiile (7.3) şi (7.4) apar ca notaţii I_1 şi I_2, invarianţii eforturilor şi respectiv deformaţia specifică volumetrică ε_v .

Modelul cel mai simplu este <u>modelul liniar elastic</u> (fig.7.1a) la care legea constitutivă este chiar legea lui Hooke.

<u>Modelul elastic neliniar</u>, denumit şi modelul variabil elastic (fig.7.1b) este caracterizat de o relaţie neliniară $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ între eforturi şi deformaţiile specifice. Forma acstei relaţii poate fi explicită sau implicită. Un caz particular al acestui model îl reprezintă modelul biliniar.

<u>Modelul elasto-plastic</u> (fig.7.1c) este caracterizat de un comportament elastic pînă la atingerea unei anumite stări limită de efort σ_p, urmat apoi de un comportament plastic cu deformaţii specifice remanente, la care relaţia efort deformaţie nu este univocă.

<u>Modelul vîsco-plastic</u> (fig.7.1d) este un model elasto-plastic la care apare explicit şi factorul timp. În cazul deformaţiilor plastice, valorile maxime ale eforturilor sînt dependente de viteza de deformaţie. Pînă la atingerea stării limită de efort σ_p nu se produc decît deformaţii elastice. La depăşirea acestei limite se produc deformaţii vîscoase remanente.

<u>Modelul vîsco-elastic</u> (fig.7.1e) este caracterizat de un comportament elastic al materialelor, la care se asociază şi deformaţii în timp, indiferent de nivelul eforturilor. Viteza de deformaţie

depinde atît de mărimea eforturilor cît şi de “istoria” încărcărilor la care a fost supus materialul. La descărcare deformaţiile elastice se anulează, iar cele vîscoase se “recuperează” în timp.

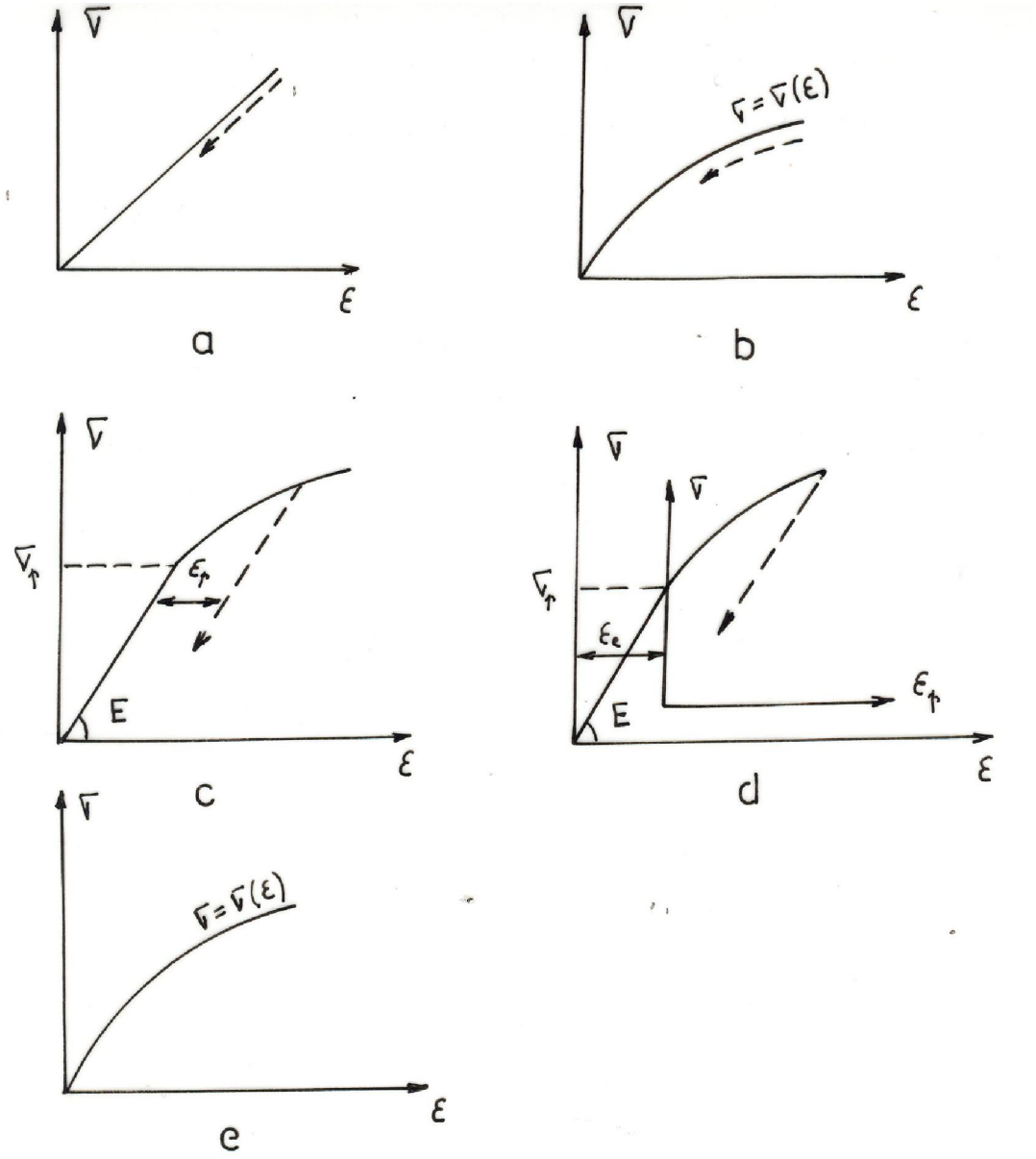


Fig.7.1 Modele de material. Curbe caracteristice.
a. model liniar elasic; b.neliniar elastic; c. elasto-plastic;
d. elasto-vîsco-plastic; e. vîsco-elastic

Una din relaţiile propuse pentru definirea relaţiei tensiune-deformaţie o reprezintă curba Ramberg-Osgood, sau curba celor trei parametri (fig.7.2):

$$(7.5)\ \mathrm{K}\,\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 + a\left|\frac{\sigma}{\sigma_c}\right|^{r-1}\right)$$

unde a,r şi σ_c sînt trei parametri ce definesc curba. În mod asemănător se poate exprima relaţia moment-curbură.

$$(7.6)\ \mathrm{K}\,\phi = \frac{M}{EI}\left(1 + a\left|\frac{M}{M_c}\right|^{r-1}\right)$$

În expresiile 7.5 şi 7.6 σ_c reprezintă efortul unitar de comparaţie iar M_c momentul încovoietor de comparaţie, a şi r, parametri definind relaţia generală neliniară între σ şi ε şi între M şi ϕ cu r=1,n.

În acest capitol se va utiliza forma (7.5) a relaţiei Ramberg-Osgood pentru dezvoltarea calculului de ordinul I şi calculului de ordinul II neliniar elastic.

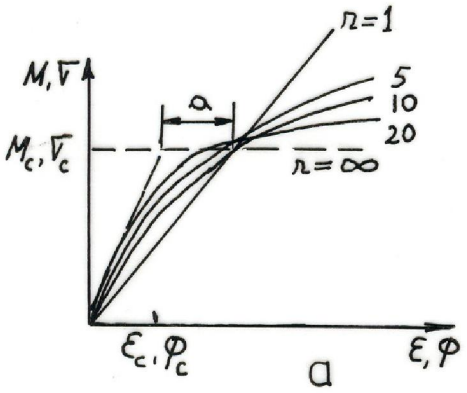


Fig.7.2 Curbe efort unitar deformaţii specifice,funcţie de parametrul r

7.2 Calculul de ordinul I, neliniar elastic

Ipotezele simplificatoare adoptate în acest calcul sînt:
-relaţia efort unitar-deformaţie specifică este o relaţie neliniară de tip Ramberg-Osgood (fig.7.2a)

$$(7.7)\ \mathrm{K}\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 + a\left|\frac{\sigma}{\sigma_c}\right|^{r-1}\right)$$

Se constată că toate curbele trec prin punctul de coordonate (ε_c+a,σ_c), iar pe măsură ce parametrul r creşte, curbele tind către curba materialului ideal elasto-plastic;
-relaţia forţă-deplasare este o relaţie neliniară de tip Ramberg-Osgood (fig.7.2a)

$$(7.8)\ \mathrm{K}\ \phi = \frac{M}{EI}\left(1 + a\left|\frac{M}{M_c}\right|^{r-1}\right)$$

-deplasările sînt mici în raport cu dimensiunile structurii;
-se admite valabilă ipoteza lui Bernoulli

Admiţînd aceste ipoteze rezultă următoarele consecinţe:
-ecuaţiile de echilibru static se exprimă în raport cu forma iniţială a structurii;
-rigiditatea şi flexibilitatea structurii depind de mărimea forţelor exterioare, respectiv de mărimea eforturilor;
-soluţia problemei se obţine utilizînd un calcul în cicluri, la începutul fiecărui ciclu de calcul rigiditatea sau flexibilitatea se corectează funcţie de rezultatele anterioare.

Dacă pentru $\sigma \le \sigma_c$ la descărcare nu rezultă deformaţii remanente iar cantitatea de energie disipată de structură este neglijabilă, se poate admite că structura este un sistem conservativ.
Pentru rezolvarea structurii este necesară matricea de rigiditate a elementelor de bare şi a structurii în ansamblu. Matricea de rigiditate a barei se obţine prin inversarea matricei de flexibilitate.

7.3 Calculul de ordinul II, neliniar elastic

În calculul de ordinul II, neliniar elastic se ţine seama atît de neliniaritatea fizică cît şi de neliniaritatea geometrică, respectiv de influenţa modificării geometriei structurii asupra mărimii deplasărilor şi eforturilor structurii.

În acest caz ecuaţiile de echilibru static se exprimă în raport cu forma deformată a structurii.

Deoarece, aşa cum s-a arătat la calculul de ordinul I, matricea de rigiditate se obţine prin inversarea matricei de flexibilitate, în cazul introducerii neliniarităţii geometrice se ajunge la o formă foarte dezvoltată a termenilor acestei matrice. Ca urmare, este de preferat ca în calculul de ordinul II să se utilizeze matricea de rigiditate tangentă din calculul de ordinul I iar influenţa modificării geometrice să fie introdusă prin corectarea lungimii barelor funcţie de poziţia deplasată a nodurilor.

7.4 Calcul neliniar elasto-plastic

În subcapitelele precedente s-a admis că materialul se comportă perfect elastic, descărcarea structurii fiind un fenomen total reversibil. Cercetările experimentale au arătat că în structurile reale, în anumite secţiuni eforturile unitare ating limita de curgere a materialului, iar deformaţiile depăşesc limita comportării perfect elastice.

Ca urmare, au loc modificări ale comportării structurii, comparativ cu aceea rezultată dintr-un calcul în domeniul elastic. Se produc deformaţii plastice locale ale materialului însoţite de o redistribuire a eforturilor. La descărcare structura revine numai parţial către poziţia iniţială, înregistrîndu-se deformaţii şi eforturi remanente.

Producerea unor asemenea situaţii este determinată de o multitudine de factori dintre care sînt de remarcat următorii:

-depăşirea în exploatarea structurii a valorii forţelor considerate în calcul;
-imperfecţiunile de execuţie;
-cedările de reazem;
-variaţiile de temperatură;
-încărcări dinamice neconsiderate în calcul;
-concentrări de eforturi în secţiunile de îmbinare ale elementelor.

Deşi în structurile reale se înregistrează asemenea situaţii ele nu-şi pierd capacitatea portantă, fenomenul curgerii locale a materialului conducînd la apariţia unor degradări locale (fisuri în elementele din beton armat sau în sudură, striviri de material, deformaţii mari etc.).

Rezultă că în raport cu limitele stabilite prin calculul în domeniul elastic structurile reale au o rezervă de rezistenţă conferită atît de configuraţia structurilor cît şi de comportarea elasto-plastică a materialului.

Evaluarea rezervei de rezistenţă a structurii considerînd ca element de comparaţie rezultatul calculului în domniul de comportare elastică, a constituit o preocupare deosebită a cercetătorilor şi proiectanţilor în ultimele decenii, determinate de tendinţa către realizarea de structuri economice, dar mai ales de asigurarea construcţiilor amplasate în zone seismice la acţiunea unor asemenea solicitări.

7.5 Premisele calculului în domeniul elasto-plastic

Navier a arătat că este important să se cunoască limita pînă la care o structură se comportă perfect elastic şi, prin comparaţie cu construcţii existente, să se stabilească criterii de dimensionare în condiţii de siguranţă.

Această concepţie s-a impus şi a fost general adoptată ulterior, prezentînd avantajul că prin considerarea comportării elastice materialul capătă un caracter convenţional, care conduce la stabilirea unor metode de calcul cu aplicare unitară la construcţii metalice sau de beton armat.

Construcţia se consideră în situaţia de exploatare şi dimensionarea se face astfel încît, pentru încărcările respective, să fie asigurată comportarea perfect elastică. Justificarea unui asemenea mod de calcul stă în concordanţă bună şi în mod obişnuit acoperitoare a rezultatelor, faţă de datele experimentărilor efectuate pe modele reduse sau la scară naturală.

Cercetările experimentale conduc însă şi la alte constatări, care scot în evidenţă limitele şi neajunsurile unui calcul exclusiv în domeniul elastic.

Astfel, în zonele restrînse de aplicare a unor forţe concentrate, sau în vecinătatea anumitor goluri, apar concentrări de eforturi care conduc la depăşiri locale a limitei domeniului elastic. La construcţii metalice, elementele păstrează eforturi reziduale de la laminare şi anumite prelucrări.

Experienţa mai arată că diferite cauze, cum sînt inexactităţile de confecţionare sau de montaj la unele elemente componente, eforturile secundare, cedările de reazeme, nu au în genere o influenţă sensibilă asupra capacităţii portante, în dezacord cu rezultatele calculului în domeniul elastic, care pentru asemenea situaţii conduce la modificări substanţiale în repartizarea eforturilor.

Faptul că structura se comportă bine, cu toate aceste neglijări şi neconcordanţe faţă de un calcul în domeniul elastic, se datoreşte tocmai proprietăţilor neelastice ale materialelor, care permit o redistribuire de eforturi ce elimină surplusurile locale.

Însuşi criteriul de apreciere a siguranţei construcţiilor, admis în calculul elastic, este criticabil. Întradevăr în condiţiile aplicării legii proporţionalităţii în domeniul micilor deplasări, se consideră că o structură a ajuns la situaţia limită cînd, în fibra extremă a secţiunii celei mai solicitate, efortul unitar atinge valoarea σ_c (limita de curgere). Faţă de această situaţie se stabileşte coeficientul de siguranţă. Este evident că un asemenea criteriu nu corespunde unei limite naturale în comportarea structurii, deoarece nu se referă la ansamblul acesteia, ci la o singură secţiune.

Cercetarea experimentală a capacităţii portante la diferite structuri scoate în evidenţă această neconcordanţă. Dacă la o structură static determinată capacitatea portantă efectivă este apropiată faţă de cea rezultată din calcul, la structuri static nedeterminate situaţia se schimbă. După atingerea limitei domeniului elastic, structura poate suporta în continuare creşterea încărcării, deşi în anumite zone încep să se dezvolte deformaţii plastice. Numai cînd distribuţia acestor zone atinge un anumit stadiu se ajunge la cedarea structurii. Înseamnă că situaţia limită a structurii este cu totul alta decît cea a secţiunii celei mai solicitate din stadiul de comportare elastică. Nedeterminarea statică ascunde de obicei rezerve de rezistenţă importante, pe care un calcul în domeniul elastic nu le poate prinde.

Cercetarea comportării dincolo de limita domeniului elastic se referă în principal la structurile solicitate dominant la încovoiere şi face uz de o schematizare a fenomenelor în care intervin noţiunile de moment plastic şi de articulaţie plastică, la baza cărora stă premiza că materialul posedă proprietăţi plastice certe. Se găsesc în această situaţie oţelurile utilizate obişnuit în structurile de rezistenţă ale construcţiilor, care prezintă o ductilitate pronunţată, fiind capabile să dezvolte deformaţii importante dincolo de limita elastică, fără pericol de rupere casant. Un calcul pe criteriul stadiului de cedare plastică nu poate avea deci obiect decît în măsura în care există asigurarea prealabilă că materialul structurii îndeplineşte această condiţie.

7.6 Calculul de ordinul I, elasto-plastic. Metoda plastică simplă

În calculul de ordinul I elasto-plastic, se admit următoarele ipoteze simplificatoare:

-materialul are o comportare ideal elasto-plastică. Se adoptă curba caracteristică propusă de Prandtl (fig.7.3) prin care se consideră că materialul are o comportare elastică atît timp cît $\sigma \le \sigma_c$ şi $\varepsilon \le \varepsilon_c$ după care materialul se deformează continuu, eforturile unitare rămînînd constante. La descărcare, revenirea are loc elastic, dar se înregistrează deformaţiile remanente ε_r. În această situaţie, structura de rezistenţă nu mai este un sistem conservativ;

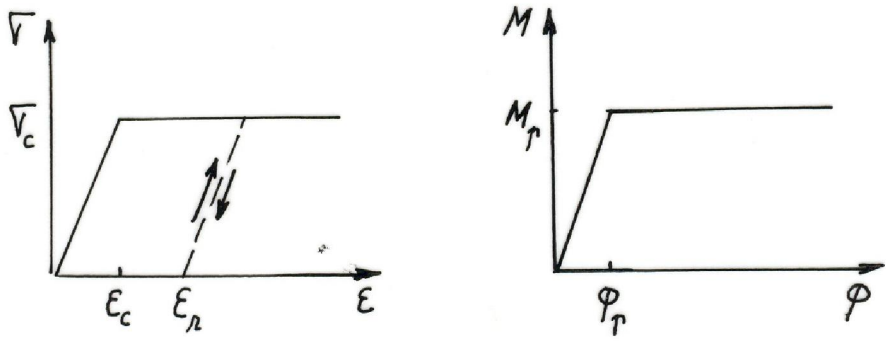


Fig.7.3 Deformaţii elasto-plastice

-relaţia moment-curbură este o relaţie de forma din fig.7.3 prin care se admite că după plastificarea materialului pe întreaga secţiune transversală, situaţie în care momentul încovoietor atinge valoarea M_p curbura creşte continuu sub efort constant.

În secţiunea în care momentul încovoietor a ajuns la valoarea momentului M_p se formează o articulaţie plastică punctuală. În realitate, secţiunile în care se formează articulaţia plastică sînt înconjurate de zone cu secţiuni parţial plastificate. În calcul se admite că articulaţia plastică este punctuală iar materialul din zonele învecinate se află în domeniul elastic. De asemenea, se admite că în articulaţiile plastice materialul permite dezvoltarea de rotiri nelimitate;
-se admite valabilă ipoteza lui Bernoulli, a secţiunilor plane înainte şi după deformaţie;
-secţiunile transversale se consideră dublu simetrice;
-forţele care acţionează asupra structurii sînt aplicate static, sînt continuu crescătoare şi variază funcţie de un parametru unic;
-deplasările sînt mici şi nu se consideră influenţa lor asupra mărimii eforturilor;
-nu are loc pierderea de stabilitate locală sau generală pînă cînd structura nu se transformă într-un mecanism total sau parţial;
-momentul plastic al secţiunii este constant, deci se neglijează influenţa forţei tăietoare şi forţei axiale asupra sa.

Consecinţele acestor ipoteze sînt următoarele:
-condiţiile de echilibru static se exprimă în raport cu forma iniţială a structurii;
-nu se poate aplica principiul suprapunerii efectelor diferitelor ipoteze de încărcare;
-rigiditatea elementelor variază ca urmare a apariţiei articulaţiilor plastice;
-soluţia problemei se obţine printr-un calcul în cicluri.

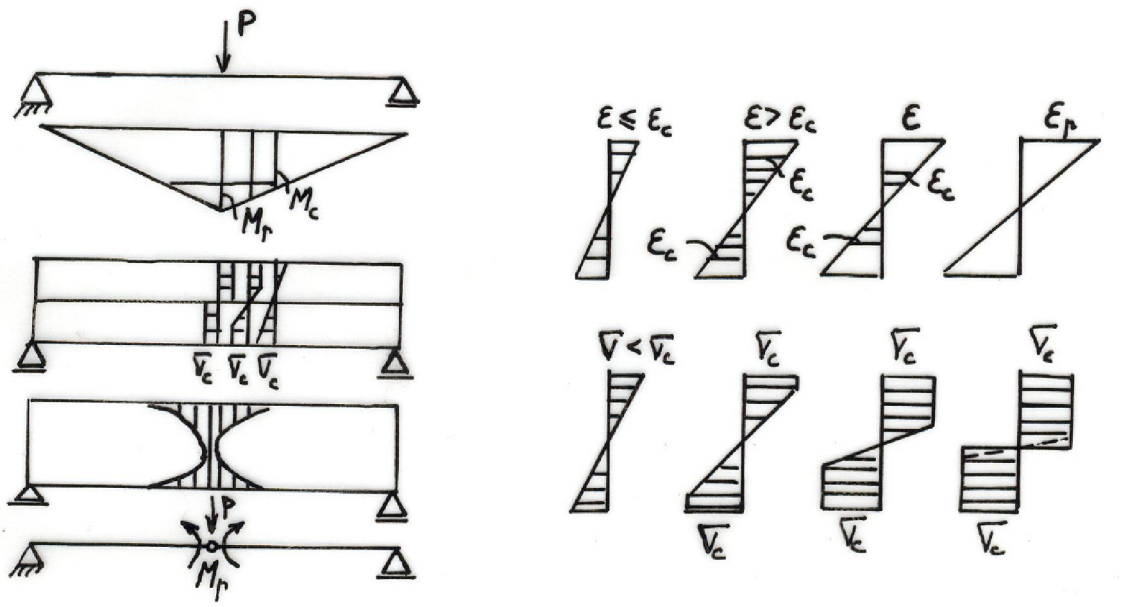


Fig.7.4 Stadii în formarea unei articulaţii plastice pentru o grindă dreaptă simplu rezemată încărcată cu o forţă uniform distribuită

În fig.7.4 s-au reprezentat distribuţiile deformaţiilor specifice şi eforturilor unitare corespunzătoare diferitelor trepte de variaţie a forţelor exterioare, distribuţii ce se înregistrează într-o bară supusă la încovoiere. Stadiul 1 corespunde comportării perfect elastice a materialului. Limita acestui stadiu este atinsă cînd $\sigma = \sigma_c$ iar momentul încovoietor, denumit momentul încovoietor de curgere, are expresia $M_c = \sigma_c W_{el}$

Lungimea palierului de curgere este importantă; de obicei $\varepsilon_c \approx 0{,}1\%$ şi $\varepsilon_p \approx 1{,}5\%$ astfel că deformaţia specifică ajunge să fie de 12-15 ori mai mare decît cea corespunzătoare limitei domeniului elastic

-Stadiile 2 şi 3 corespund comportării elasto-plastice a materialului. Plastificarea avansează către axa neutră. În jurul acestei axe pentru $\varepsilon < \varepsilon_c$ materialul se află în domeniul elastic iar în zona periferică unde $\varepsilon > \varepsilon_c$ materialul se află în domeniul plastic.

-Stadiul 4 reprezintă stadiul limită, corespunzător plastificării materialului pe întreaga secţiune.

Teoretic, eforturile unitare sînt constante pe cele două zone ale secţiunii transversale, dar în realitate există o mică zonă în care materialul nu se plastifică.

Stadiile analizate mai înainte pentru o secţiune, pot fi întîlnite în diversele secţiuni ale unei bare la care cel puţin într-o secţiune s-a atins valoarea momentului plastic

Exemplul 7.1: Să se determine momentul plastic pentru grinda continuă cu două deschideri egale (fig.7.5) , încărcată cu o forţă uniform distribuită g.

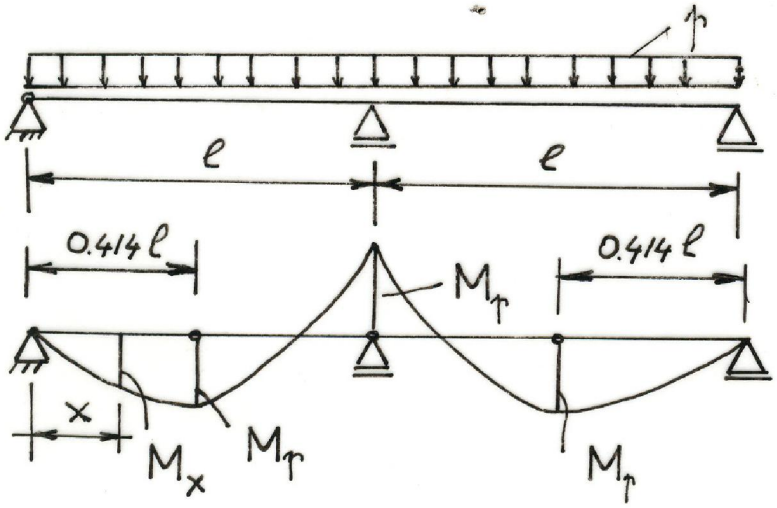


Figura 7.5 Calculul momentului plastic pentru o grindă continuă cu un reazem intermediar

Datorită simetriei grinzii şi a încărcării se obţine şi diagrama de moment încovoietor simetrică cu momente egale pe reazem şi în cîmp. Se presupune că articulaţiile plastice apar în aceste secţiuni şi momentul încovoietor este egal cu momentul plastic M_p (fig.7.5).

Momentul încovoietor în secţiunea curentă x are expresia:

$$M_x = M_x^{\,o} - (M_p / l)x = p(l-x)/2 - M_p x / l$$

şi secţiunea de moment maxim se determină anulînd forţa tăietoare:

$$T_x = dM_x/(dx) = p(l-x)/2 - px/2 - M_p / l = 0$$

din care rezultă:

$$x = l/2 - M_p/(pl)\,; M_p = pl^2/2 - plx$$

Dacă se egalează M_x cu M_p se obţine:

$$M_p(l + x/l) = px(l-x)/2$$

în care se introduce M_p funcţie de x şi rezultă:

$$x^2 + 21x - l^2 = 0\,;\; x = 0{,}414l$$

Momentul plastic M_p se calculează cu valoarea lui x=0,414l şi devine:

$$M_p = 0{,}086\,pl^2 = 0{,}68(pl^2/8)$$

care este cu 3.15% mai mare ca momentul plastic calculat considerînd articulaţia plastică amplasată în mijlocul deschiderii.

Exemplul 7.2: Să se determine forţa de rupere pentru grinda din figura 7.6, cunoscînd momentul plastic al secţiunii transversale. Din calculul static se cunosc momentele încovoietoare:

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{Pl}{8}\,;\; M_2 = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} = \frac{Pl}{8}$$

Dacă forţa P creşte atunci momentele din cele trei secţiuni devin egale şi ating valoarea momentului plastic.

Grinda se transformă în mecanism şi forţa de rupere are expresia:

$$P = \frac{8M_p}{l}$$

Forţa de rupere se poate stabili şi din ecuaţia de lucru mecanic virtual:

$$\delta L = -M_p\delta\theta_1 - M_p\delta\theta_{12} - M_p\delta\theta_2 + P\delta D_p = 0$$

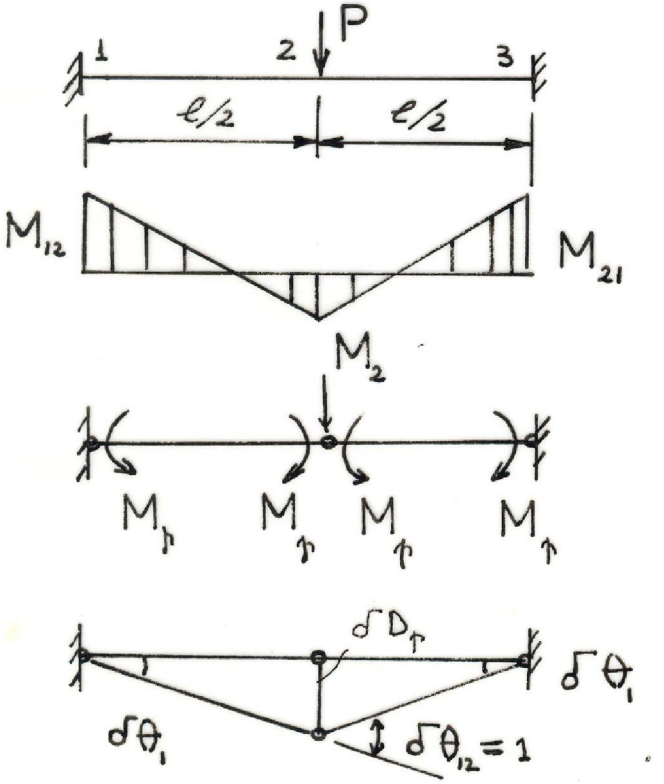


Figura 7.7 Determinarea forţei de rupere pentru o grindă dublu încastrată

în care $\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = 0{,}5;\ \delta\theta_{12} = 1, \delta D_p = \delta\theta_i l/2 = \frac{l}{4}$

de unde se obţine aceeaşi valoare.

Exemplul 7.3: Să se determine forţa de rupere pentru cadrul din figura 7.8a folosind metoda combinării mecanismelor.

Mecanismul din figura 7.8b , care conduce la forţa:

$P_b \cdot 5\delta\theta = 1{,}5M_p\delta\theta + 2M_p\delta\theta$

$P_b = 3{,}5M_p/5 = 0{,}7M_p$

Pentru mecanismul din figura 7.8c se obţine forţa:

$3P_c\, 4\delta\theta = 1{,}5M_p\delta\theta + 3M_p\, 2\delta\theta + M_p\delta\theta$

$P_c = 8{,}5M_p/12 = 0{,}708M_p$

Mecanismul din figura 7.8d, se obţine din combinarea mecanismelor din figurile 7.8b şi 7.8c.

$P_d\, 5\delta\theta + 3P_d\, 4\delta\theta = 3M_p\, 2\delta\theta + M_p\delta\theta + M_p\delta\theta + M_p\delta\theta$

$P_d = 0{,}5M_p = P_r$

care corespunde forţei de rupere $P_r = 0{,}5M_p$ a structurii.

Diagrama de moment încovoietor corespunzătoare se prezintă în figura 7.8e, şi s-a stabilit cunoscînd momentele în articulaţiile plastice, respectiv scriind echilibrul structurii pe ansamblu şi fiecare element structural.

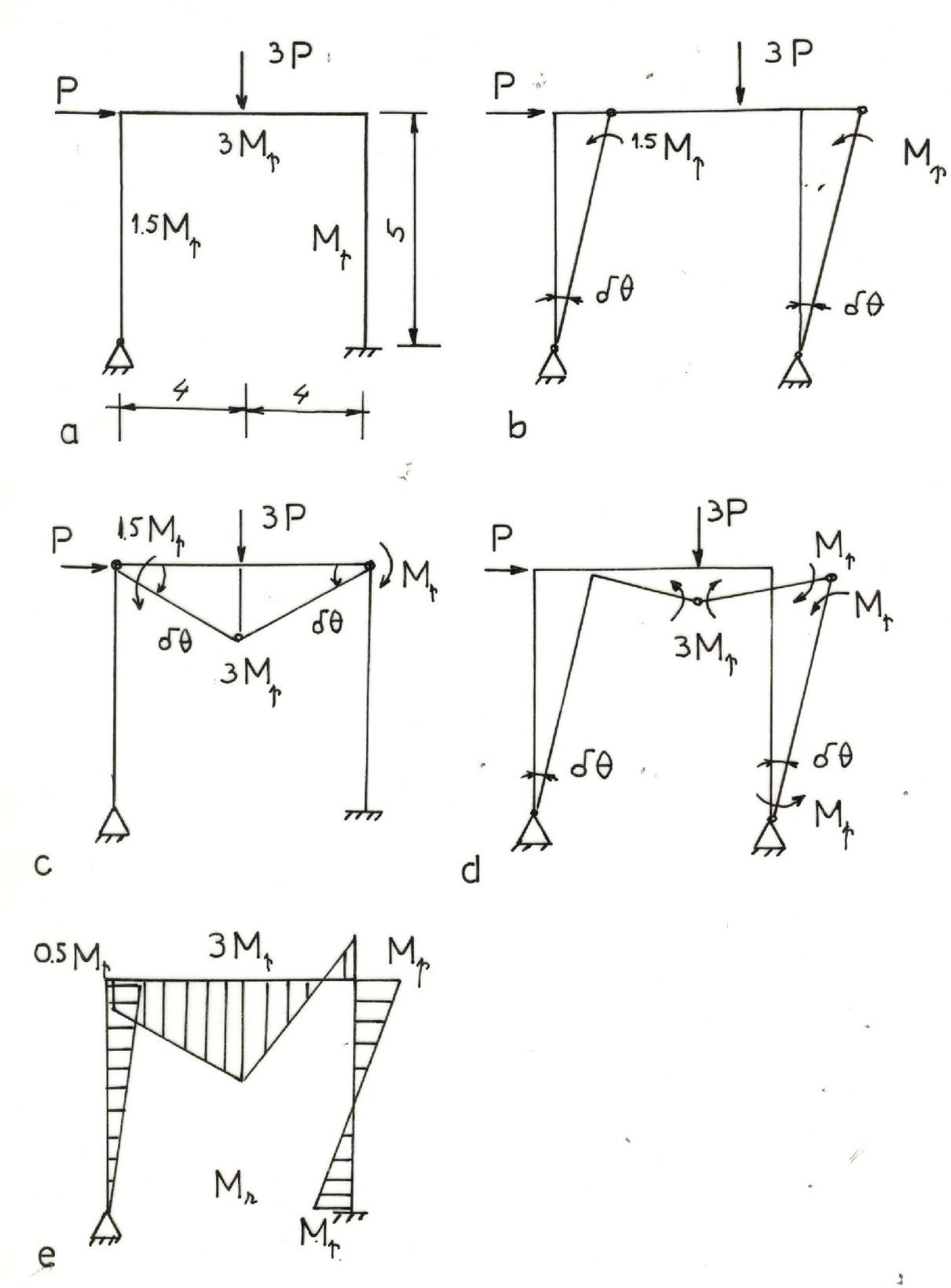


Figura 7.8 Exemplu de calcul metoda combinării mecanismelor

Exemplul 4: Se studiază starea de eforturi şi deplasări la structura din figura 7.9 în stadiul elastic, după apariţia articulaţiilor plastice şi pînă la atingerea capacităţii portante (calcul biografic).

Structura este de două ori static nedeterminată. Diagrama de moment din calculul static se prezintă în figura 7.9b.

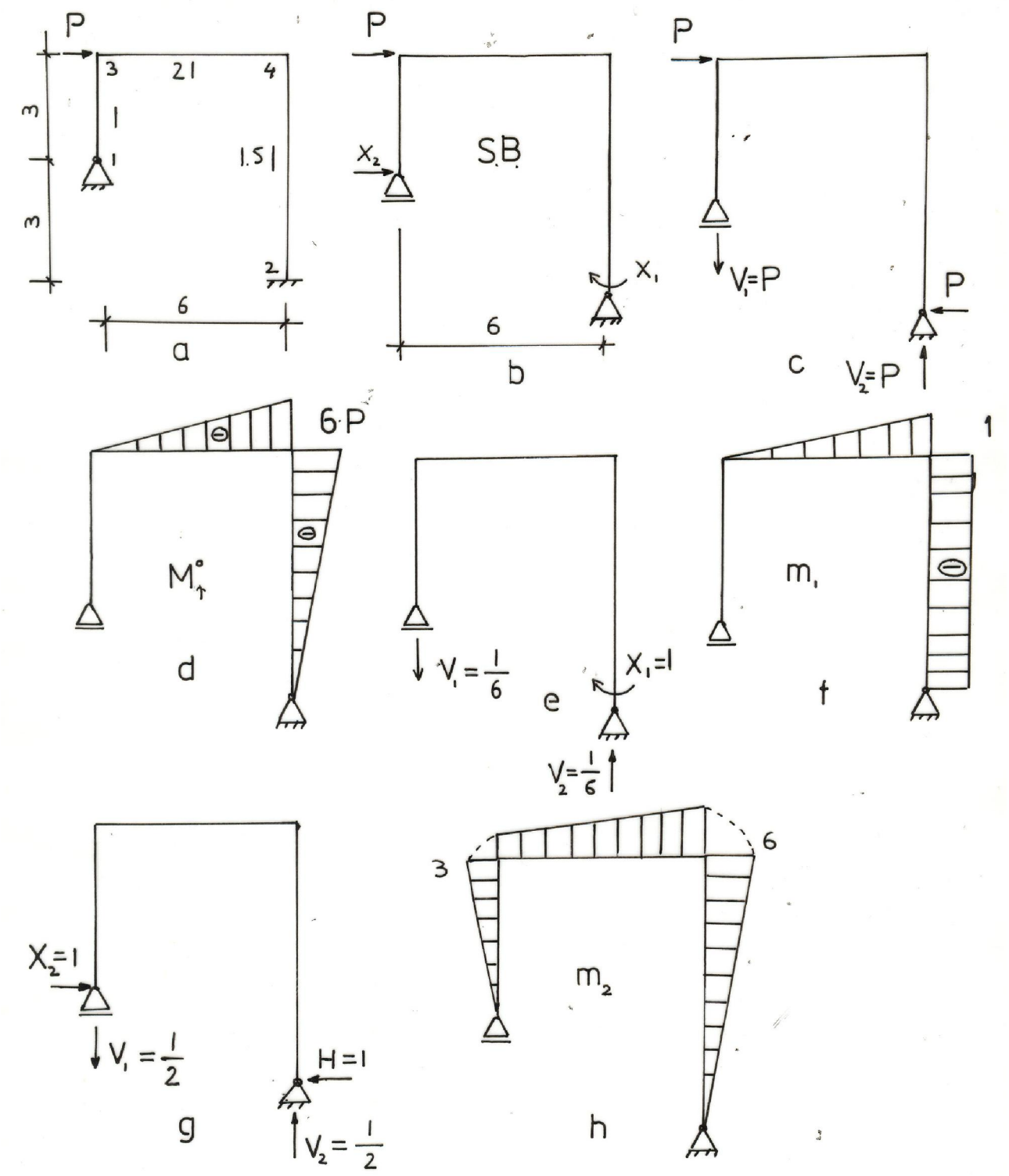


Figura 7.9 Exemplu calcul biografic al structurilor; a.structură iniţială; b.sistem de bază; c.calcul reacţiuni pentru S.B. încărcat cu sarcini exterioare;d.diagramă M_p^0; e.calcul reacţiuni pentru X_1=1; f.diagramă unitară m_1;g.calcul reacţiuni pentru X_2=1; h. diagramă unitară m_2

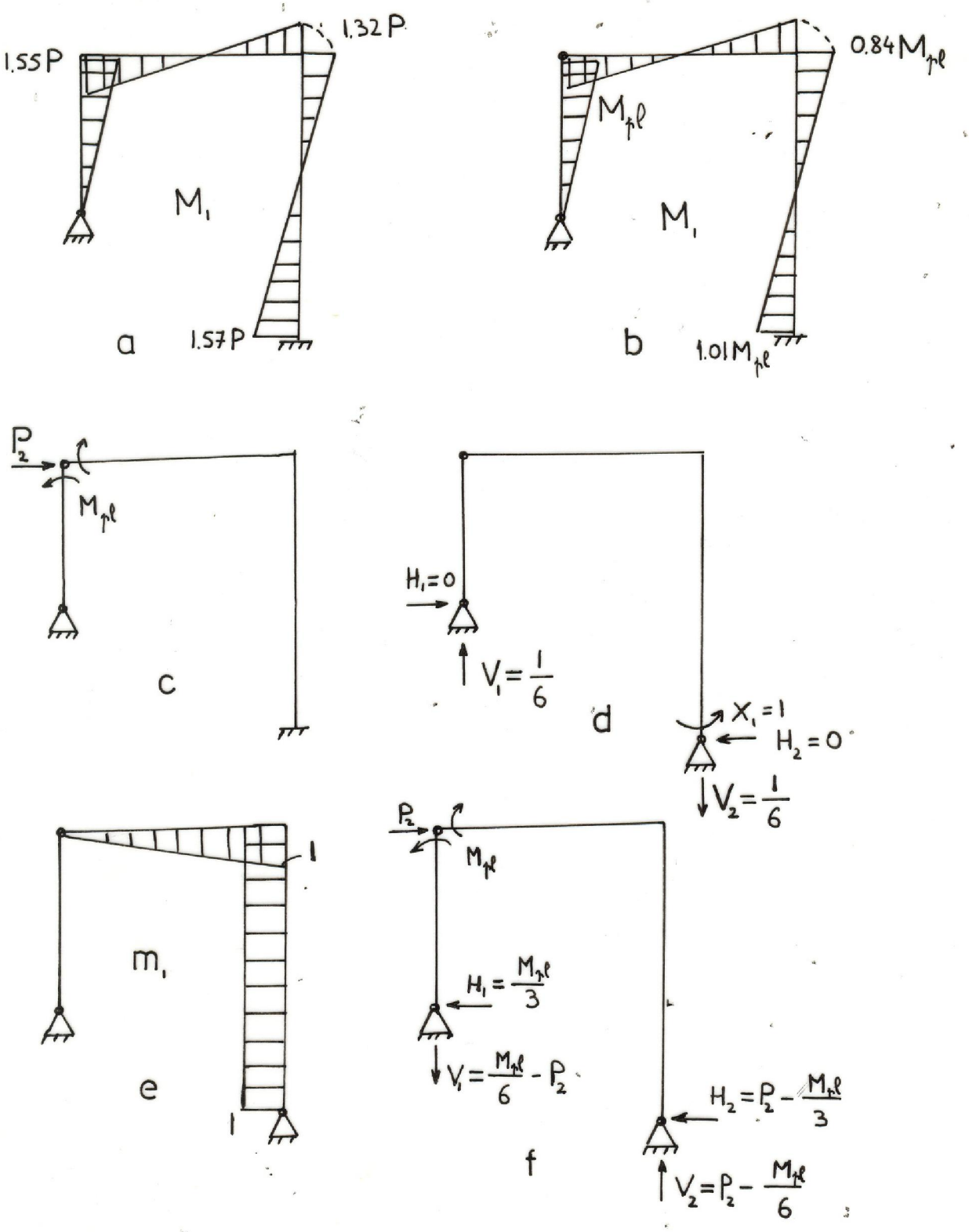


Figura 7.10 a. diagramă de moment încovoietor din prima iteraţie (M_1); b. diagramă de moment încovoietor corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în nodul 3 ;
c. forţe care acţionează pe structură în iteraţia 2 (P_2, M_{pl}); d. calcul reacţiuni pentru X_1=1;
e.diagramă unitară m_1; f.calcul reacţiuni pe S.B. din P_2, M_{pl}

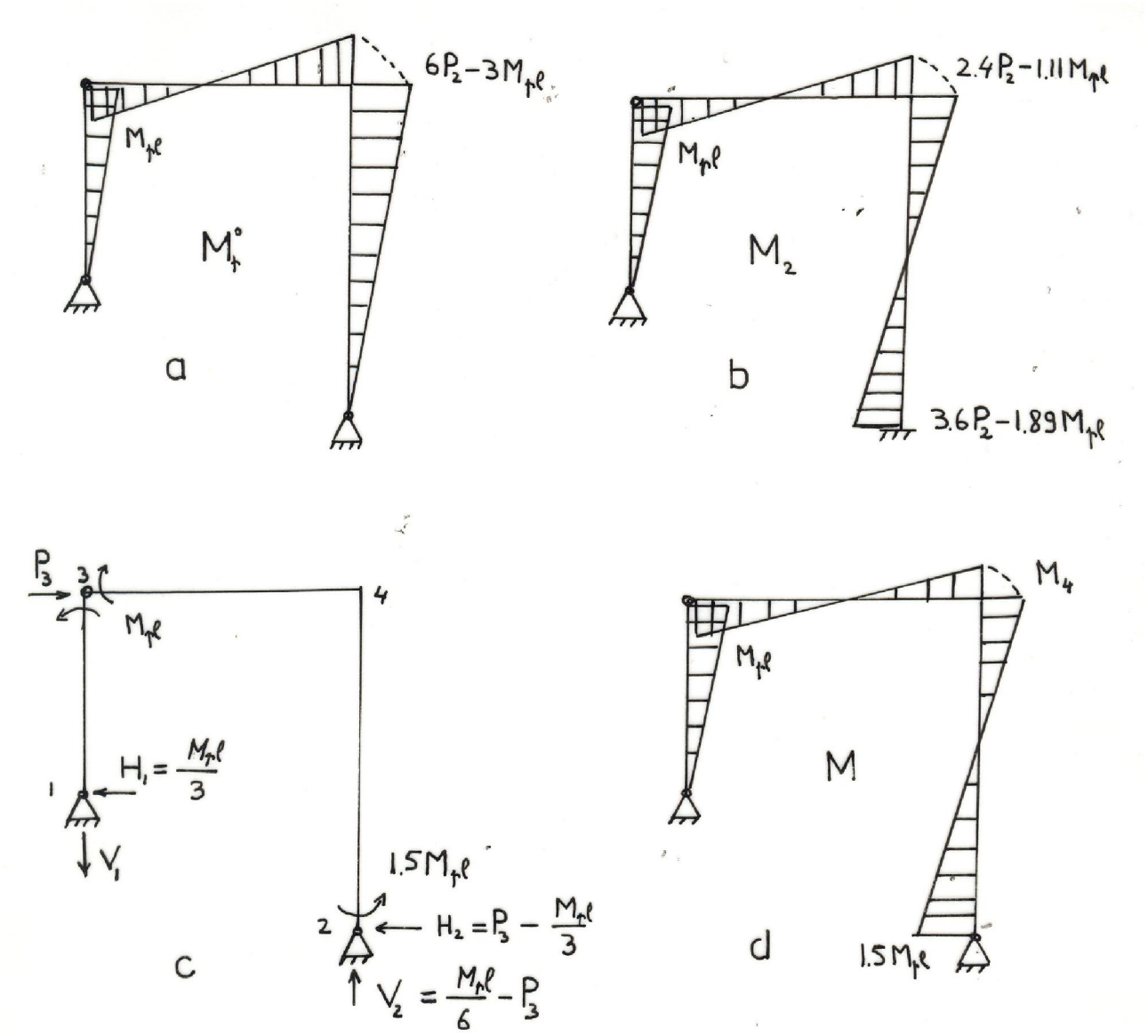


Figura 7.11 a. diagramă de moment încovoietor din S.B. încărcat cu forţe exterioare;b.diagramă finală de moment; c.calcul reacţiuni;d. diagramă de moment

Structura la care urmează să efectuăm un calcul biografic este de două ori static nedeterminată. Sistemul de bază se obţine eliminînd două legături şi introducînd echivalentul lor mecanic (fig.7.9b. Diagrama M_p^0 se obţine din încărcarea sistemului de bază cu forţa exterioară P, iar diagramele unitare din încărcarea sistemului de bază cu X_1=1 sau X_2=1 (fig.7.9f,h).

Calcul reacţiuni pentru sistem de bază încărcat cu forţe exterioare:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow P \cdot 6 - V_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = P$$

Calcul reacţiuni pentru sistem de bază încărcat cu X_1=1:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 6 + 1 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{6}$$

Calcul reacţiuni pentru sistemul de bază încărcat cu X_2=1:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow 1 \cdot 3 - V_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{2}$$

Calcul coeficienţi şi termeni liberi:

$$\delta_{11}=\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{1{,}5EI}1\cdot 6\cdot 1=\frac{1}{EI}(1+4)=\frac{5}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\left(\frac{2}{3}3+\frac{1}{3}6\right)+$$

$$+\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\left(\frac{2}{3}6+\frac{1}{3}3\right)+\frac{1}{1{,}5EI}\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6=$$

$$=\frac{1}{EI}(9+18+45+48)=\frac{120}{EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\left(\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 3\right)+\frac{1}{1{,}5EI}1\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 6=$$

$$\frac{1}{EI}(7{,}5+12)=\frac{19{,}5}{EI}$$

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6P\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{1{,}5EI}\frac{1}{2}\cdot 6P\cdot 6\cdot 1=\frac{1}{EI}(6P+12P)=\frac{18P}{EI}$$

$$\Delta_{2p}=\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 6P\cdot 6\left(\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 3\right)+\frac{1}{1{,}5EI}\frac{1}{2}\cdot 6P\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6=\frac{1}{EI}(45P+48P)=\frac{93P}{EI}$$

Sistemul de ecuaţii capătă forma:

$$5X_1+19{,}5X_2+18P=0$$

$$19{,}5X_1+120X_2+93P=0$$

Soluţiile sînt: $X_1=-1{,}57P$; $X_2=-0{,}518P$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte folosind relaţia:

$$M=M_p{}^0+m_1X_1+m_2X_2$$

$$M_{31}=-3\cdot(-0{,}518P)=1{,}55P$$

$$M_{43}=-6P+1{,}57P+6\cdot 0{,}518P=-1{,}32P$$

$$M_{24}=1{,}57P$$

Condiţia care se pune este: $1{,}55P_1=M_{pl}\rightarrow P_1=0{,}64M_{pl}$ diagrama de moment încovoietor fiind prezentată în figura 7.10b.

În figura 7.10c este prezentată structura în pasul următor de calcul, cu o articulaţie plastică deja formată. Structura este o dată static nedeterminată.

Calculul reacţiunilor pentru structura încărcată cu X_1=1 este prezentată în figura 7.10d, iar diagrama unitară în figura 7.10e.

Calcul reacţiuni S.B. încărcat cu X_1=1:

$$\sum M_3{}^{st}=0\rightarrow H_1=0$$

$$\sum M_3{}^{dr}=0\rightarrow -1+V_2\cdot 6=0\rightarrow V_2=\frac{1}{6}$$

Calcul reacţiuni pentru S.B. încărcat cu forţa P_2 şi momentul plastic M_{pl}:

$$\sum M_3{}^{st}=0\rightarrow M_{pl}+H_1\cdot 3=0\rightarrow H_1=\frac{M_{pl}}{3}$$

$$\sum X_i=0\rightarrow H_1+H_2=P_2\rightarrow H_2=P_2-H_1=P_2-\frac{M_{pl}}{3}$$

$$\sum M_3^{dr} = 0 \rightarrow M_{pl} + \left(P_2 - \frac{M_{pl}}{3} \right) \cdot 6 - V_2 \cdot 6 = 0$$

$$V_2 = \frac{M_{pl}}{6} + P_2 - \frac{M_{pl}}{3} = P_2 - \frac{M_{pl}}{6}$$

Diagrama de moment rezultată este prezentată în figura 7.11a

Momentul în secţiunea 4 este:

$$M_4 = H_2 \cdot 6 = \left(\frac{M_{pl}}{3} - P_2 \right) \cdot 6 = 6 \cdot P_2 - 3M_{pl}$$

Calcul coeficienţi:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{1{,}5EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{1}{EI}(1+4) = \frac{5}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \left[\frac{1}{3} M_{pl} - \frac{2}{3}(-6P_2 + 3M_{pl}) \right] - \frac{1}{1{,}5EI} 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}(-6P_2 + 3M_{pl}) =$$

$$= \frac{1}{EI}(9{,}49M_{pl} - 18P_2)$$

$$X_1 = \frac{18P_2 - 9{,}49M_{pl}}{5} = 3{,}6P_2 - 1{,}89M_{pl}$$

Calcul momente în secţiuni:

$$M_{43} = (3M_{pl} - 6P_2) + 3{,}6P_2 - 1{,}89M_{pl}$$

$$M_{43} = 1{,}11M_{pl} - 2{,}4P_2 = -(2{,}4P_2 - 1{,}11M_{pl})$$

$$M_{24} = 3{,}6P_2 - 1{,}89M_{pl}$$

Se pune condiţia ca momentul în secţiunea 2 să fie egal cu momentul de plastificare a secţiunii :

$$3{,}6P_2 - 1{,}89M_{pl} = 1{,}5M_{pl}$$

$$P_2 = \frac{1{,}5M_{pl} + 1{,}89M_{pl}}{3{,}6} = 0{,}94M_{pl}$$

$$M_{43} = -2{,}4 \cdot 0{,}94M_{pl} + 1{,}11M_{pl} = -1{,}14M_{pl}$$

Calcul reacţiuni :

$$\sum M_3^{st} = 0 \rightarrow H_1 \cdot 3 - M_{pl} = 0 \rightarrow H_1 = \frac{M_{pl}}{3}$$

$$H_2 = P_3 - \frac{M_{pl}}{3}$$

$$\sum M_3^{dr} = 0 \rightarrow M_{pl} - 1{,}5M_{pl} + \left(P_3 - \frac{M_{pl}}{6} \right) \cdot 6 - V_2 \cdot 6 = 0$$

Momentul în secţiunea 4 va fi:

$$M_4 = -1{,}5M_{pl} + \left(P_3 - \frac{M_{pl}}{3} \right) 6 = -1{,}5M_{pl} + 6P_3 - 2M_{pl} = 6P_3 - 3{,}5M_{pl} = 1{,}5M_{pl}$$

$$\rightarrow P_3 = 0{,}833M_{pl} \text{ (valoarea forţei la care se formează mecanismul)}$$

CAP.8 CALCULUL DE ORDINUL II

8.1 Specificul calculului de ordinul II

În statica liniară, modelul de calcul utilizat este caracterizat prin admiterea comportării perfect elastice a materialului şi prin menţinerea poziţiei deformate în domeniul micilor deplasări. În aceste condiţii, se acceptă cele două ipoteze simplificatoare, şi anume: (1) aplicarea condiţiei de echilibru a ansamblului forţelor exterioare şi interioare în raport cu poziţia nedeformată a structurii; (2)admiterea proporţionalităţii între încărcări şi deplasări.

Se ajunge astfel la o simplificare considerabilă a calculului, eliminînd totodată influenţa modului de deformare a structurii asupra acţiunii forţelor.

Asemenea modele simplificate,din statica liniară, conduc în numeroase cazuri la rezultate care concordă satisfăcător cu verificările făcute prin măsurători şi experimentări. Totuşi, se întîlnesc frecvent situaţii cînd este necesar să se facă apel la modele îmbunătăţite, care să se apropie mai mult de comportarea reală. Utilizarea largă a acestora a devenit posibilă, în condiţii eficiente, datorită răspîndirii calculului automatizat şi aplicării unor metode de calcul specifice acestuia.

Sînt numeroase cazuri cînd trebuie luată în considerare influenţa deformării structurii asupra modului de calcul al eforturilor, ceea ce conduce implicit la un calcul neliniar. În cazul structurilor zvelte, de înălţime mare sau cu deschideri importante nu mai poate fi neglijată modificarea configuraţiei geometrice datorită încărcării. În asemenea situaţii, eforturile care se dezvoltă efectiv pot depăşii substanţial pe cele determinate admiţînd ipotezele simplificatoare ale staticii liniare, iar uneori însăşi stabilitatea echilibrului structurii poate fi pereclitată şi deci trebuie făcute verificări concludente.

Cauzele principale care pot determina necesitatea unui calcul neliniar, caracterizat prin raportarea condiţiei de echilibru a forţelor la poziţia deformată a structurii, sînt: (1) prezenţa unor solicitări axiale puternice în elementele structurii, chiar dacă poziţia deformată se menţine în domeniul micilor deplasări; (2) structuri la care trecerea în poziţia deformată este caracterizată prin deplasări mari. În ambele situaţii se admite o comportare perfect elastică a materialului structurii, neliniaritatea avînd aici caracter geometric, deoarece provine din considerarea configuraţiei structurii în poziţia deformată.

Spre deosebire de aceasta, o altă cauză ce conduce la un calcul neliniar are caracter reologic, provenind din comportarea neliniară a materialului, pentru că se renunţă la premiza comportării perfect elastice, admiţînd trecerea structurii în domeniul elasto-plastic. Acest mod de abordare conduce la constatarea că structurile static nedeterminate au rezerve de rezistenţă pe care un calcul liniar elastic nu le poate scoate în evidenţă. Capacitatea portantă se pierde la atingerea unui nivel de încărcare limită, cînd se produce cedarea plastică a structurii.

Asociind neliniaritatea reologică cu neliniaritatea geometrică, se ajunge la un model complex care crează posibilitatea unui studiu, mai aproape de realitate, aplicabil oricărei structuri, alcătuită din materiale cu diferite proprietăţi şi pentru diverse niveluri de încărcare. Spre deosebire de calculul liniar elastic unde eforturile şi deplasările variază proporţional cu încărcările, iar capacitatea portantă este definită convenţional, un asemenea model scoate în evidenţă comportarea efectivă a structurii pe parcursul creşterii forţelor, precum şi fenomenele prin care se poate ajunge la epuizarea capacităţii portante a structurii, prin pierdere de stabilitate sau prin cedare plastică.

Calculul de stabilitate este utilizat de mult timp în practică ,comparativ cu calculul de ordinul II, datorită faptului că fenomenul pierderii stabilităţii s-a manifestat , prin producerea unor grave accidente în construcţii. Fenomenul pierderii stabilităţii este un fenomen extrem de periculos deoarece se produce brusc făcînd imposibilă orice intervenţie pentru prevenirea scoaterii din exploatare, parţială sau totală, a construcţiei.

Dintre cele două situaţii menţionate, care conduc la necesitatea unui calcul geometric neliniar, se va reţine aici cazul structurilor ce cuprind bare supuse la forţe axiale puternice.

Cazurile de structuri cu bare puternic comprimate sînt frecvente, de exemplu structuri de hale industriale cu poduri rulante grele, structuri etajate ce suportă forţe gravitaţionale mari.

Cît timp în calcul raportarea forţelor se face la poziţia iniţială, rezultă o independenţă între acţiunea fortelor axiale şi cea a forţelor aplicate transversal, în sensul că solicitarea axială nu influenţează asupra eforturilor şi deplasărilor datorită încovoierii. Cînd condiţia de echilibru static este raportată la poziţia deformată, apare o interdependenţă între efectele celor două categorii de forţe, care se reflectă în relaţii de calcul care nu mai sînt liniare.

Metoda deplasărilor în calculul de ordinul II

În calculul de ordinul II,comparativ cu calculul de ordinul I, trebuie să se ţină seama de influenţa flexibilităţii structurii, considerînd influenţa forţelor axiale asupra eforturilor.

Astfel, apar bare puternic comprimate (stîlpi încărcaţi axial) cărora li se ataşează un parametru de încărcare axială : $v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$

Rigidităţile barelor la rotire de nod şi rotire de bară, precum şi momentele de încastrare perfectă, se corectează prin introducerea efectului forţei axiale. Tabelul centralizator, cu aceste corecţii, este prezentat în figura 8.9.

Aceste corecţii vor afecta numai diagramele unitare m_1,m_2 , nu şi diagrama M_p^0.
Coeficienţii necunoscutelor care se obţin prin izolare de nod, se obţin la fel ca în calculul de ordinul I. Pentru coeficienţii necunoscutelor corespunzători gradelor de libertate elastică, folosirea ecuaţiei de proiecţie este mai avantajoasă întrucît se pot folosii din tabel (fig.8.9) direct valorile forţelor tăietoare corectate. Folosirea la calculul acestor coeficienţi a principiului lucrului mecanic virtual implică adăugarea unor momente de forma $\frac{v^2 \cdot i_{ij}}{l_{ij}}$ care se înmulţesc cu rotaţiile barelor.

Odată determinaţi coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi urmează rezolvarea sistemului de ecuaţii şi trasarea diagramei finale de moment folosind relaţia $M = M_p^{\ 0} + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$

Observaţie:
Din cele prezentate anterior rezultă că în calculul de ordinul II se determină atît eforturile cît şi deplasările secţiunii curente. Eforturile şi deplasările sînt funcţii de forţa axială şi de caracteristicile barei (E,I şi l).

Teoretic se ajunge ca în momentul în care deplasarea este infinit de mare, rigiditatea barei să devină egală cu zero, iar bara îşi pierde stabilitatea prin deformare continuă.

Este pus în evidenţă un fenomen pe care statica liniară nu-l poate prinde. Efectul creşterii sarcinii axiale P este echivalent cu o scădere progresivă a rigidităţii barei. La atingerea valorii P_{cr} rigiditatea devine echivalentă cu zero şi deformarea barei creşte teoretic indefinit.

Acest fenomen este asemănător ca finalitate, cu acela al flambajului barei. Dacă bara ar fi supusă numai la forţele axiale P şi s-ar realiza condiţii perfecte de centrare, poziţia nedeformată se menţine pe tot parcursul creşterii sarcinilor, pînă în momentul cînd acestea ating o anumită valoare P_{cr}.

Fie grinda dreptă simplu rezemată din fig.8.1 încărcată la mijlocul deschiderii cu cu o forţă concentrată H şi forţa axială P, avînd momentul de inerţie I şi modulul de elasticitate longitudinală E. În calculul de ordinul I momentul încovoietor la mijlocul deschiderii este $M_I = \frac{Hl}{4}$

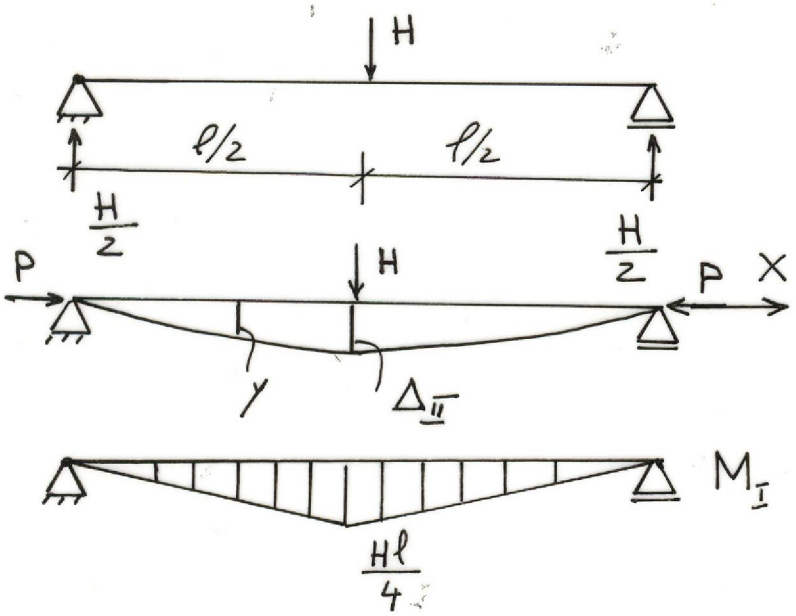


Fig.8.1Efectul calculului de ordinul II

În calculul de ordinul II, condiţiile de echilibru static se exprimă pe forma deformată a structurii, ceea ce revine la a lua în consideraţie influenţa deformaţiilor barei asupra mărimii eforturilor. Ca urmare momentul încovoietor la mijlocul deschiderii are expresia:

(8.1) K $M_{II} = \frac{H}{2} \cdot \frac{l}{2} + P \cdot \Delta_{II}$

Pentru a determina mărimea deplasării y se utilizează ecuaţia fibrei medii deformate:

(8.2) K $\ddot{y} = -\frac{M_x}{EI}$

unde M_x, momentul încovoietor din secţiunea curentă, are forma:

(8.3) K $M_x = \frac{H}{2} \cdot x + P \cdot y$

Introducînd notaţia $k^2 = \frac{P}{EI}$ din ecuaţia (7.2) rezultă:

(8.4) K $\ddot{y} + k^2 y = -\frac{H \cdot x}{2EI}$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul II, neomogenă cu coeficienţi constanţi.
Soluţia ecuaţiei omogene este:

(8.5) K $y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$

iar soluţia particulară se alege de forma termenului liber:

(8.6) K $y_2 = C \cdot x$

Punînd condiţia ca soluţia particulară să verifice ecuaţia diferenţială se obţine:

$k^2 Cx = -\frac{H}{2EI} x \rightarrow C = -\frac{H}{2EI} \frac{1}{k^2}$ dar $k^2 = \frac{P}{EI}$

de unde $C = -\frac{H}{2P}$

iar y_2 va fi:

(8.7) K $y_2 = -\frac{H}{2P} x$

Cu această expresie a soluţiei particulare, soluţia generală devine:

(8.8) K $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{2P} x$

constantele C_1 şi C_2 urmînd a fi determinate din condiţiile la limită, introduse asupra formei deformate a barei.

Aceste condiţii sînt:

-pentru x=0 săgeata este egală cu zero,y=0

-pentru x=l/2, rotirea este egală cu zero,y'=0

Expresia rotirii y' în secţiunea curentă este:

(8.9) K $y' = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx - \frac{H}{2P}$

Introducînd condiţiile la limită în expresiile (8.8) şi (8.9) rezultă constantele C_1 şi C_2:

-din prima condiţie $C_2=0$

-din a doua condiţie $C_1 = \frac{H}{2Pk \cos kl/2}$

Deplasarea secţiunii curente, cu valorile C_1 şi C_2 este:

(8.10) K $y = \frac{H}{2P}\left(\frac{\sin kx}{k \cos kl/2} - x \right)$

iar momentul încovoietor, în aceeaşi secţiune, devine:

(8.11) K $M_x = \frac{H}{2} \cdot x + P \cdot y = \frac{H}{2} \cdot x + \frac{H}{2}\left(\frac{\sin kx}{k \cos k\frac{l}{2}} - x \right)$

(8.12) K $M_x = \frac{H}{2} x + Py = \frac{H}{2} x + P\frac{H}{2P}\left(\frac{\sin kx}{k \cos k\frac{l}{2}} - x \right)$

(8.13) K $x = \frac{l}{2}; M_I = \frac{H}{2} \cdot \frac{l}{2} \rightarrow M_{II} = \frac{H}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{H}{2}\left(\frac{\sin k\frac{l}{2}}{k \cos k\frac{l}{2}} - \frac{l}{2} \right)$

Se notează cu v parametrul de încărcare axială v=kl.

(8.14) K $M_{II} = M_I + \frac{H}{2}\left(\frac{\sin \frac{v}{2}}{k \cos \frac{v}{2}} - \frac{l}{2} \right)$

(8.15) K $M_{II} = M_I + \frac{H}{2}\left(\frac{tg\frac{v}{2}}{k} - \frac{l}{2} \right)$ sau $M_{II} = M_I + \frac{H}{2}\left(\frac{tg\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} \cdot \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right)$

(8.16) K $M_{II} = M_I + \frac{H}{2} \cdot \frac{l}{2}\left(\frac{tg\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}} - 1 \right)$

Dacă notăm $v' = \frac{v}{2}$

(8.17) K $M_{II} = M_I \cdot \frac{tgv'}{v'}$

Notăm:

(8.18) K $\frac{tgv'}{v'} = \beta_1(v')$

(8.19) K $M_{II} = M_I \beta_1(v')$

(8.20) K $\Delta_{II} = \frac{H}{2P}\left(\frac{\sin k\frac{l}{2}}{k\cos k\frac{l}{2}} - \frac{l}{2}\right) = \frac{H}{2P}\left(\frac{\sin k\frac{l}{2}}{k\cos k\frac{l}{2}} - \frac{l}{2}\right)$

$\Delta_{II} = \frac{Hl}{4P}\left(\frac{tgv'}{v'} - 1\right)$

Relaţiile obţinute sînt valabile strict pentru tipul de structură luat în analiză. Ele îşi propun să demonstreze influenţa forţelor axiale asupra momentului încovoietor şi deplasării din calculul de ordinul I.

8.2 Bara încastrată-articulată încărcată cu rotire de nod

Fie bara din fig.8.2 încărcată cu forţa axială P şi rotirea $z_k = -1$. Rotirea s-a ales astfel încît , în sistemul de axe adoptat, curbura să rezulte negativă. Se vor determina expresiile momentului încovoietor din capătul încastrat şi expresia forţei tăietoare.

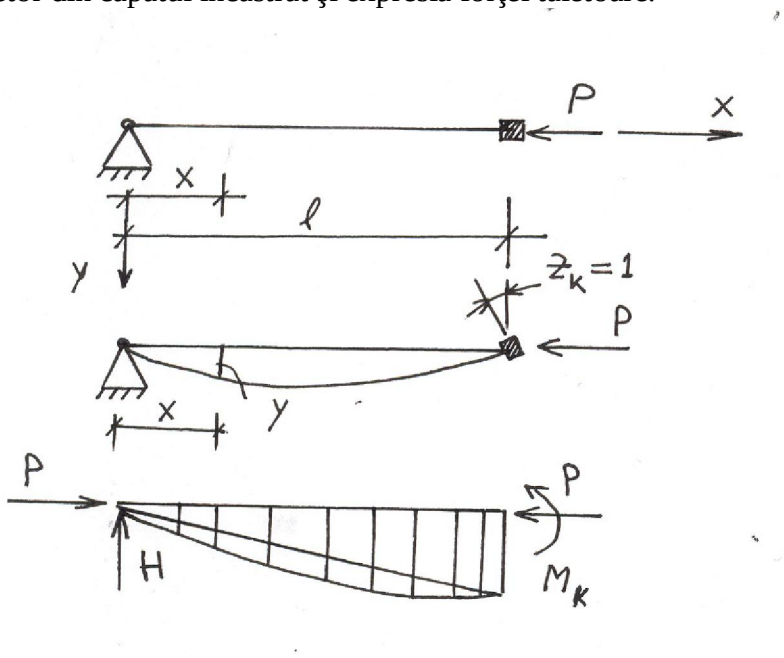


Fig.8.2 Bara încastrată articulată încărcată cu rotire de bară

Expresia momentului încovoietor în secţiunea curentă este:

(8.18) K $M_x = x \cdot H + y \cdot P$

Notînd $k^2 = \frac{P}{EI}$, ecuaţia fibrei medii deformate are forma:

(8.19) K $y''+k^2 y = -\frac{H}{EI}x$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale este de forma $y = y_1 + y_2$ sau dezvoltat:

(8.20) K $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{P}x$

unde soluţia particulară s-a ales de forma termenului liber şi i s-a impus condiţia să verifice ecuaţia (8.19).

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile la limită:

-pentru x=0,y=0

-pentru x=l, y=0

rezultînd următoarele expresii:

(8.21) K $C_1 = \frac{Hl}{P \sin v}, C_2 = 0$

unde s-a notat v=kl

Cu aceste valori ale constantelor expresia săgeţii în secţiunea curentă devine:

(8.22) K $y = \frac{H \cdot l}{P}\left(\frac{\sin kx}{\sin v} - \frac{x}{l}\right)$

Pentru a elimina pe H din expresia săgeţii se utilizează condiţia:

-pentru x=l, y'=z_k=-1

Rotirea y' este:

(8.23) K $y' = \frac{Hl}{P}\left(\frac{k \cos kx}{\sin v} - \frac{1}{l}\right)$

unde înlocuind condiţia de mai sus se obţine pentru H forma:

(8.24) K $H = \frac{EI}{l^2}\frac{v^2 tgv}{tgv - v}$

Notînd $i = \frac{EI}{l}$ şi ştiind că $M_k = Hl$ rezultă:

$M_k = 3i \cdot \phi_1(v)$ şi $H = \frac{3i}{l}\phi_1(v)$

unde:

(8.25) K $\phi_1(v) = \frac{v^2 tgv}{3(tgv - v)}$

reprezintă funcţia de corecţie a eforturilor din calculul de ordinul I, respectiv influenţa forţei axiale asupra acestor eforturi.

Deoarece în calculul de ordinul I parametrul v=0, rezultă că pentru această valoare $\phi_1(v) = 1$

8.3 Bara încastrată-articulată, încărcată cu rotire de bară

Fie bara ik din fig. 8.3 încărcată cu forţa axială P şi rotirea de bară $\psi = \frac{1}{l}$. Şi în acest caz se vor determina expresiile momentului încovoietor din capătul încastrat şi al forţei tăietoare.

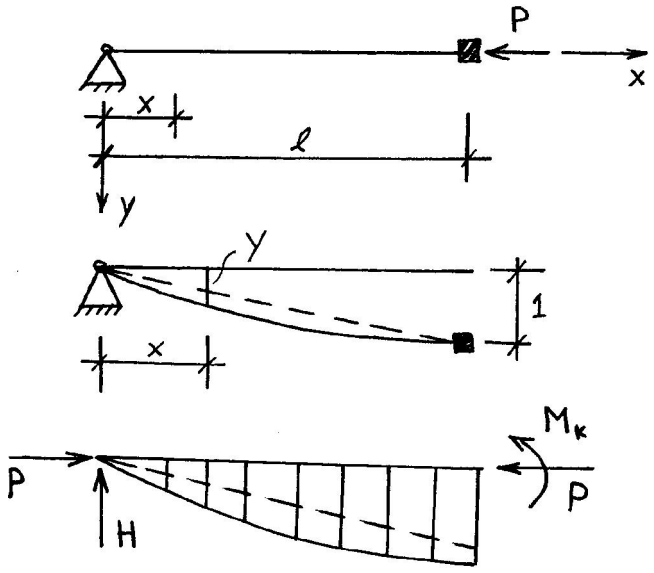


Fig.8.3 Bara încastrată-articulată încărcată cu rotaţie de bară

Expresia momentului încovoietor în secţiunea curentă este:

(8.26) K $M_x = H \cdot x + y \cdot P$

Ecuaţia fibrei medii deformate are forma:

(8.27) K K $y'' + k^2 y = -\frac{H}{EI} x$

şi soluţia generală:

(8.28) K $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{P} x$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din următoarele condiţii –la limită:

-pentru x=0, y=0

-pentru x=l, y'=0

Rotirea în secţiunea curentă fiind:

(8.29) K $y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx - \frac{H}{P}$

pentru constante rezultă expresiile:

(8.30) K $C_2 = 0$, K $C_1 = \frac{H}{P} \cdot \frac{1}{k \cos v}$

iar săgeata în secţiunea curentă devine:

(8.31) K $y = \frac{H}{P}\left(\frac{\sin kx}{k \cos v} - x \right)$

Se determină expresia lui H din condiţia:

-pentru x=l, y=1, de unde rezultă:

(8.32) K $H = \frac{P}{l} \frac{v}{tgv - v}$

Momentul încovoietor în capătul încastrat este:

(8.33) K $M_k = H \cdot l + P \cdot 1$

de unde conform relaţiei (7.33) se obţine:

(8.34) K $M_k = P\dfrac{tgv}{tgv - v}$

Deoarece $P = k^2 EI$, şi notînd $i = \dfrac{EI}{l}$ expresia momentului încovoietor devine:

(8.35) K $M_k = \dfrac{3i}{l}\dfrac{v^2 tgv}{3(tgv - v)} = \dfrac{3i}{l}\phi_1(v)$

unde $\phi_1(v)$ este funcţia de corecţie a momentului din calculul de ordinul I.
Forţa tăietoare se determină cu relaţia:

(8.36) K $T = \dfrac{M_k - P \cdot 1}{l} = \dfrac{3i}{l^2}\dfrac{v^2 tgv}{3(tgv - v)} - \dfrac{k^2 EI}{l}$

sau :

(8.37) K $T = \dfrac{3i}{l^2}\eta_1(v)$

unde $\eta_1(v)$ este funcţia de corecţie a forţei tăietoare şi are expresia:

(8.38) K $\eta_1(v) = \phi_1(v) - \dfrac{v^2}{3}$

Pentru cazul barei încastrată la ambele capete, încărcată cu forţa axială P şi cu rotire de nod sau cu rotire de bară, expresiile momentelor încovoietoare, a forţei tăietoare şi funcţiilor de corecţie sînt date în figura 8.9.
Tabelul centralizator cu funcţii de corecţie pentru barele tip încărcate cu rotiri de bară şi rotiri de nod în calculul de ordinul II este prezentat la sfîrşitul capitolului (figura 8.9).
Valorile funcţiilor de corecţie sînt prezentate în Anexa 1 la sfîrşitul cărţii.

Exemplul 8.1:

Fie stîlpul din fig. 8.4 avînd $E = 2{,}1 \cdot 10^6\, daN/cm^2$ şi I_z=29210cm^4. Se cere să se efectueze calculul de ordinul II al momentului încovoietor din încastrare şi al deplasării maxime şi să se compare rezultatele cu cele obţinute prin calculul de ordinul I.

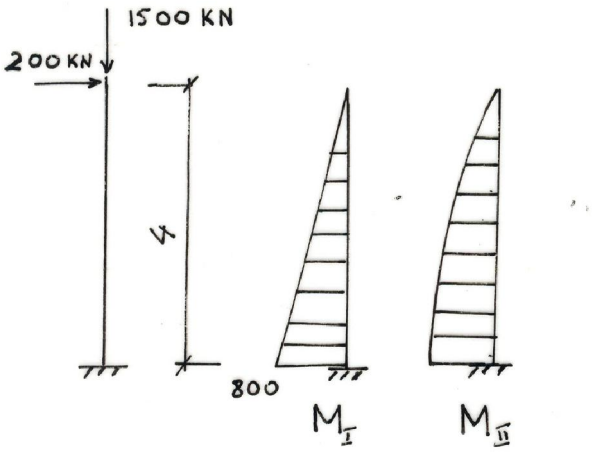


Fig.8.4 Diagrame de moment comparative pentru calculul de ordinul I şi calculul de ordinul II

Pentru acest tip de structură, consolă încărcată cu forţă axială P şi forţă normală în capătul liber al barei H, relaţiile de calcul pentru M_{II} şi Δ_{II} sînt următoarele:

$M_{II} = M_I \dfrac{tgv}{v};\ \Delta_{II} = \Delta_I \dfrac{3(tgv - v)}{v^3}$

În calculul de ordinul I, momentul încovoietor M_I=400KNm iar deplasarea capătului liber:

$$\Delta_I = \frac{Hl^3}{3EI} = \frac{200 \cdot (400)^3 \cdot 100}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 29210} = 6{,}9cm$$

Parametrul de încărcare axială are valoarea:

$$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = 400\sqrt{\frac{1500 \cdot 100}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 29210}} = 0{,}62$$

$$tgv = 0{,}713$$

În calculul de ordinul II se obţine:

-pentru deplasarea maximă:

$$\Delta_{II} = \Delta_I \frac{3(tgv - v)}{v^3} = 6{,}9 \cdot \frac{3(0{,}713 - 0{,}62)}{0{,}62^3} = 8{,}07cm$$

$$\frac{\Delta_{II}}{\Delta_I} = \frac{8{,}07}{6{,}9} = 1{,}17$$

$$M_{II} = H \cdot l + P \cdot \Delta_{II} = 200 \cdot 4 + 1500 \cdot 0{,}08 = 920KNm$$

$$\frac{M_{II}}{M_I} = \frac{920}{800} = 1{,}15$$

Acest mod de evaluare a efectului de ordinul II poate fi utilizat într-o primă fază de calcul a structurii, sau în faza de predimensionare.

Exemplul 8.2:

Să se efectueze calculul de ordinul II pentru structura de rezistenţă din fig. 8.5, folosind metoda deplasărilor, considerînd EI=18000KNm^2.

Numărul de grade de libertate cinematică : W=3B-2A-S=3x4-2x5-1=1

Calcul rigidităţi practice: $i_o = \frac{EI}{4}$; $i_{12} = \frac{EI}{6} \cdot \frac{4}{4} = 0{,}67i_o$; $i_{24} = \frac{5EI}{8} \cdot \frac{4}{4} = 1{,}5i_0$

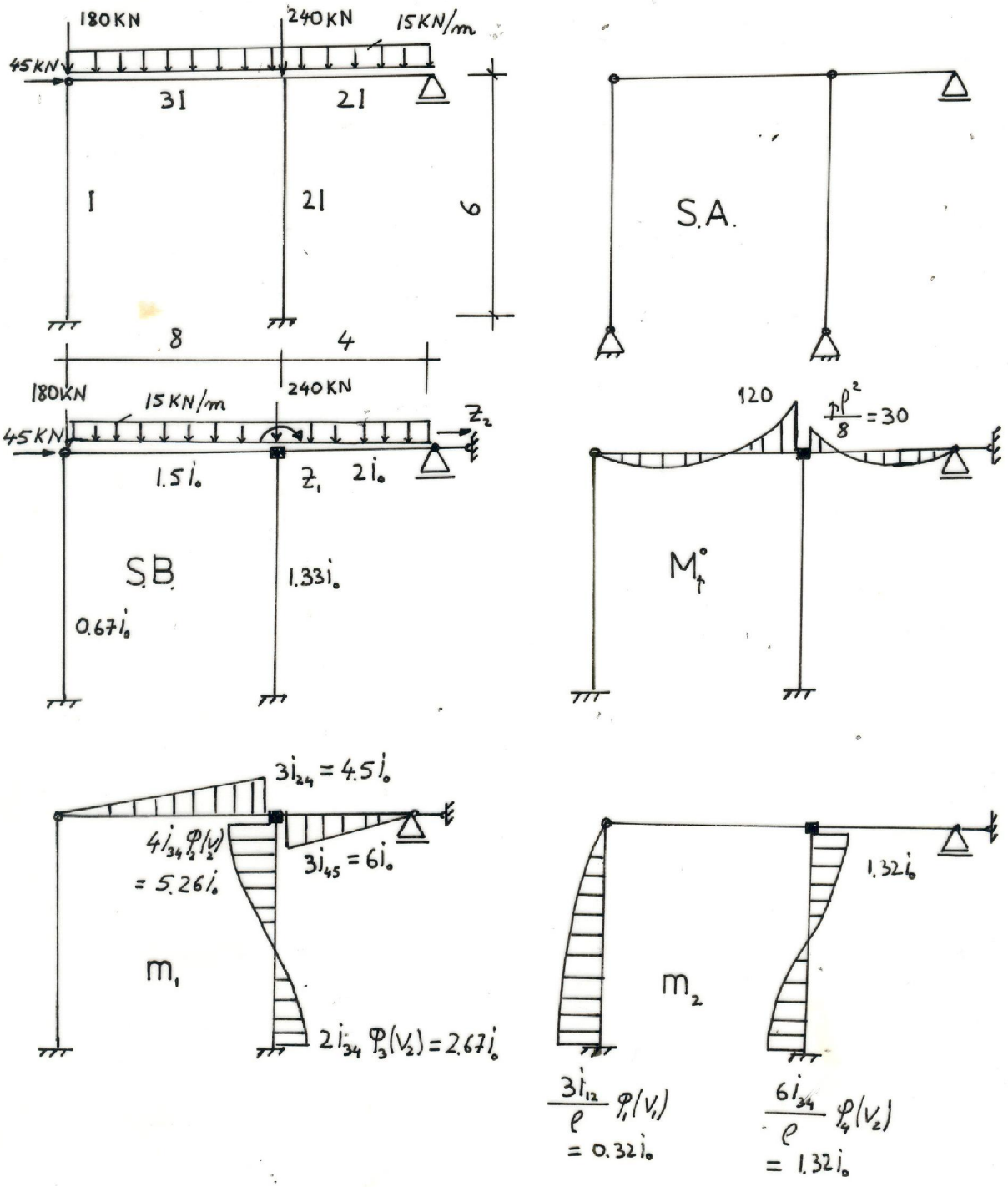


Figura 8.5 Exemplu calcul de ordinul II (structura iniţială; sistem de bază; diagrame unitare)

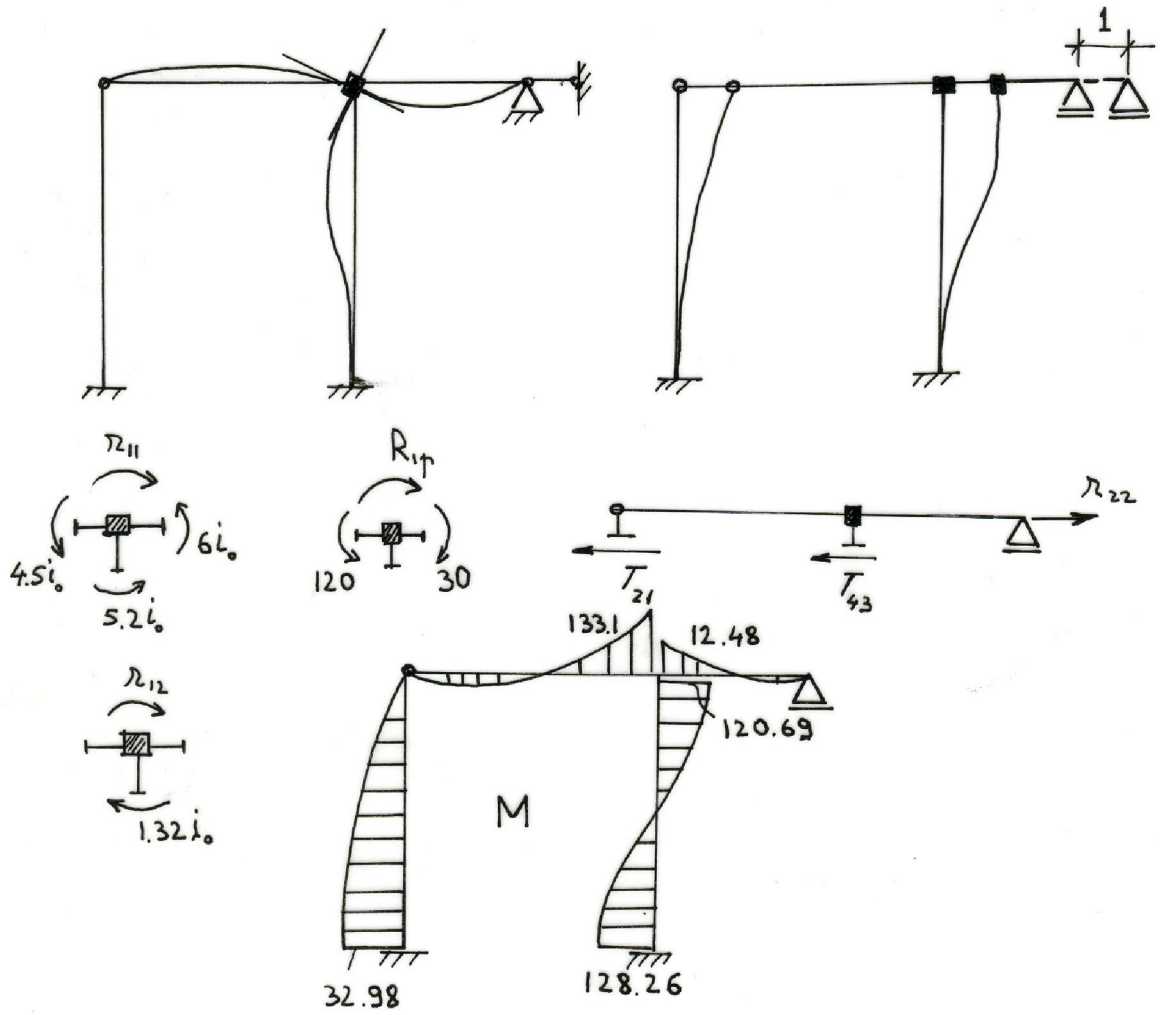


Fig.8.6 Calcul coeficienţi necunoscute şi diagramă finală de moment

Parametrii de încărcare axială: $v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$; $v_1 = 6 \cdot \sqrt{\frac{180+60}{18000}} = 0{,}69$; $v_2 = \sqrt{\frac{240+90}{2 \cdot 18000}} = 0{,}57$

$\phi_1(0{,}69) = 0{,}9678$

$\phi_4(0{,}57) = 0{,}9946$

$\phi_2(0{,}57) = 0{,}9891$

$\phi_3(0{,}57) = 1{,}0055$

Prin izolare de nod se obţine reacţiunea $r_{11} = 15{,}76 i_o$ şi $R_{1p} = 90$

Reacţiunea r_{22} o obţinem prin ecuaţie de proiecţie: $r_{22} = T_{21} + T_{43}$

$T_{21} = 3 \cdot \frac{i_{12}}{l^2} \phi_1(v_1) \quad T_{34} = 12 \frac{i_{34}}{l^2} \eta_2(v_2)$

$\eta_1(v_1) = \eta_1(0{,}69) = 0{,}9091$

$\eta_2(v_2) = \eta_2(0{,}57) = 0{,}9675$

$T_{21} = \frac{3 \cdot 0{,}67 \cdot 0{,}8091}{36} = 0{,}045$

$T_{34} = \frac{3 \cdot 1{,}33 \cdot 0{,}9675}{36} = 0{,}429$; $R_{2p} = -45$; $r_{12} = -1{,}32 i_o$

$15{,}76 \cdot Z_1 - 1{,}32 \cdot Z_2 + 90 = 0 \qquad Z_1 = 2{,}92$

$-1{,}32 \cdot Z_1 + 0{,}474 \cdot Z_2 - 45 = 0 \quad Z_2 = 103{,}07$

$M_{12} = -0{,}32 \cdot 103{,}07 = -32{,}98$

$M_{42} = 120 + 4{,}5 \cdot 2{,}92 = 133{,}14$

$M_{43} = 5{,}26 \cdot 2{,}92 - 1{,}32 \cdot 103{,}07 = -120{,}69$

$M_{45} = -30 + 6 \cdot 2{,}92 = -12{,}48$

$M_{34} = 2{,}67 \cdot 2{,}92 - 1{,}32 \cdot 103{,}07 = -128{,}26$

Exemplul 8.3: Să se rezolve structura din figura 8.7 utilizînd un calcul de ordinul II.
Într-o primă etapă se calculează numărul de grade de libertate elastică: $W = 3B - 2A - S$;
$W = 12 - 10 - 1 = 1 \rightarrow SND$

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_0 = \frac{EI}{6}$; $i_{45} = \frac{2EI}{4} \cdot \frac{6}{6} = 3 i_o$

Calculul parametrilor de încărcare axială pentru cei doi stîlpi:

$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$; $v_1 = 6\sqrt{\frac{420}{18000}} = 0{,}916$; $v_2 = 6\sqrt{\frac{300 + 20}{18000 \cdot 1{,}5}} = 0{,}65$

La trasarea diagramelor unitare s-a ţinut cont că stîlpii sînt încărcaţi axial şi în consecinţă diagramele pe stîlpi au fost corectate cu funcţii de corecţie.
Reacţiunile unitare r_{11} şi r_{12} au fost calculate prin izolare de nod iar reacţiunea r_{22} prin ecuaţii de proiecţie:

$r_{11} = 20{,}91 i_o$; $r_{12} = -1{,}48 i_0$

$T_{21} = \frac{3i}{l^2} \eta_1(v_1) = \frac{3}{36} \cdot 0{,}6674 = 0{,}0556$; unde $\eta_1(0{,}91) = 0{,}6674$

$T_{43} = \frac{12i}{l^2} \eta_2(v_2) = \frac{12 \cdot 1{,}5}{36} \cdot 0{,}95773 = 0{,}478$; unde $\eta_2(0{,}65) = 0{,}95773$

$r_{22} = T_{21} + T_{43} = 0{,}534$

Reacţiunea R_{1p} se obţine prin izolare de nod astfel $R_{1p} = 45$.

Reacţiunea R_{2p} se obţine folosind principiul lucrului mecanic virtual:
$R_{2p} \cdot 1 + 30 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{2p} = -30$

Astfel sistemul de ecuaţii devine:

$20{,}91 \cdot Z_1 - 1{,}48 Z_2 + 45 = 0 \quad Z_1 = 2{,}27$

$-1{,}48 Z_1 + 0{,}534 Z_2 - 30 = 0 \quad Z_2 = 62{,}47$

Diagrama finală de moment (fig. 8.8) se obţine prin suprapunere de efecte:

$M_{12} = -29{,}36 \qquad M_{43} = -1{,}48 \cdot 62{,}47 + 5{,}91 \cdot 2{,}27 = -79{,}03$

$M_{42} = 45 + 6 \cdot 2{,}27 = 58{,}62 \quad M_{34} = 3{,}02 \cdot 2{,}27 - 1{,}48 \cdot 62{,}47 = -85{,}6$

$M_{45} = 9 \cdot 2{,}27 = 20{,}43$

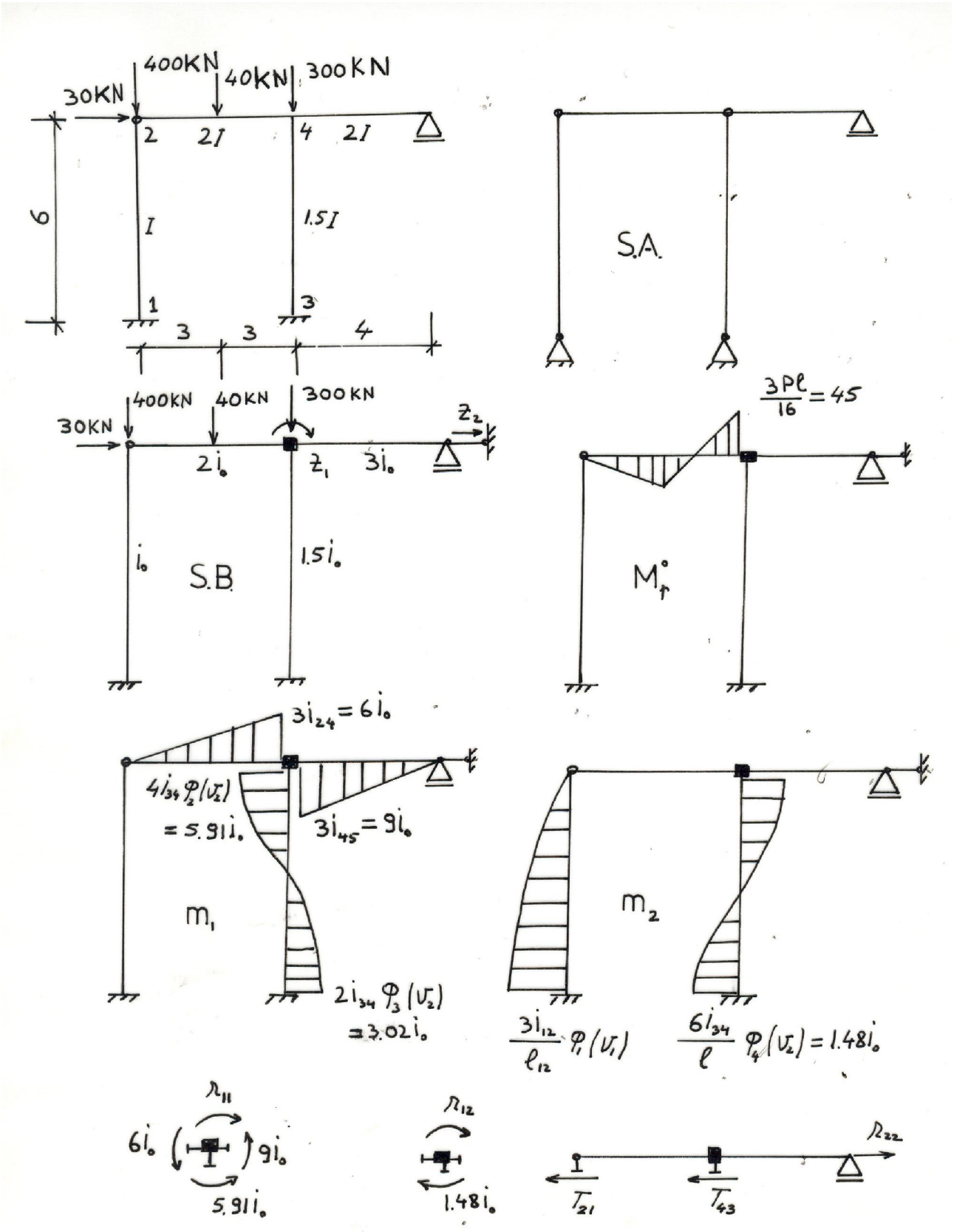


Fig.8.7 Exemplu calcul de ordinul II

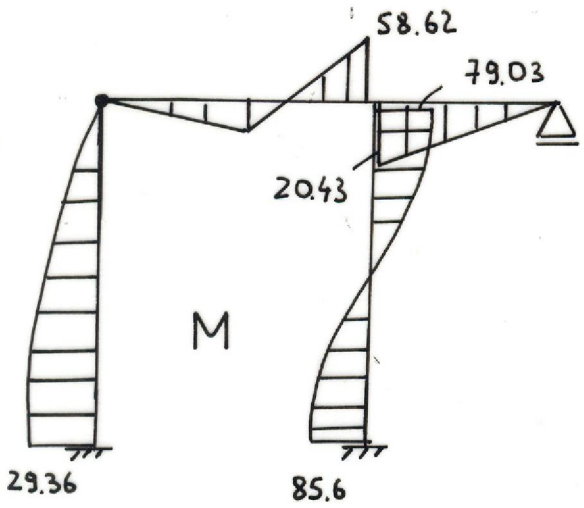


Fig.8.8 Diagramă finală de moment

Valorile funcţiilor de corecţie sînt prezentate în Anexa I.

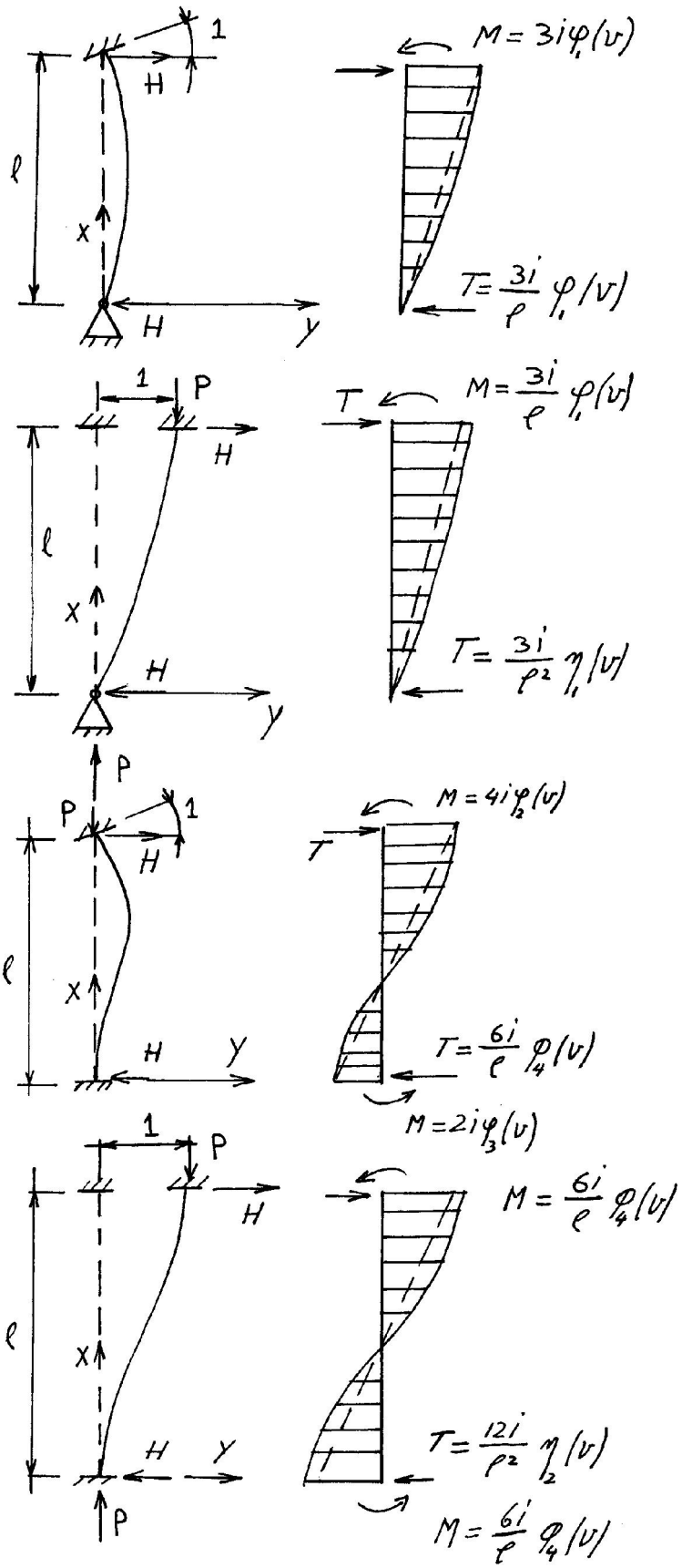


Fig.8.9 Centralizator cu funcţii de corecţie pentru barele tip din S.B. al metodei deplasărilor, încărcate cu rotiri de bară şi rotiri de nod în calculul de ordinul II

CAP.9 CALCULUL DE STABILITATE AL STRUCTURILOR

9.1 Interpretarea energetică a stabilităţii structurilor

Pierderea de stabilitate se poate produce în moduri diferite. Această denumire generică include de fapt fenomene variate, care au toate în comun faptul că se manifestă prin producerea unor deformări accentuate ale structurilor, sau ale unor elemente ale acesteia. O structură încărcată în planul său îşi poate pierde stabilitatea în acest plan, dar fenomenul poate apărea şi normal pe plan. La o structură spaţială, de exemplu la un turn, pierderea de stabilitate se poate produce prin deformare laterală, dar şi prin torsiune generală. O grindă încovoiată îşi poate pierde stabilitatea şi prin ieşire din plan, cu intervenţia unor fenomene de torsiune, după cum la o grindă cu inimă plină poate intervenii voalarea inimii.

Multe dintre aceste fenomene de pierdere a stabilităţii se preîntîmpină prin măsuri constructive luate la alcătuirea elementelor structurii şi se concretizează prin introducerea de rigidizări. Verificarea propriu zisă prin calcul intervine de obicei referitor la stabilitatea echilibrului de ansamblu al structurii, în legătură strînsă cu problema calculului de ordinul II. Asupra acestui domeniu se concentrează examinarea care urmează.

O structură acţionată de forţe axiale puternice trebuie să fie în echilibru, iar acest echilibru trebuie să fie stabil. Limita echilibrului stabil se atinge în situaţia de echilibru indiferent, caracterizată prin faptul că impunînd structurii trecerea din poziţia iniţială într-o poziţie vecină compatibilă şi lăsînd-o apoi liberă, structura rămîne în acea poziţie. S-a arătat că în situaţia de echilibru indiferent se realizează un echilibru între tendinţa de îndepărtare dată de forţele active (forţele axiale) şi tendinţa de revenire ce corespunde forţelor reactive (reacţiuni şi forţe interioare) care se nasc drept consecinţă a trecerii în poziţia vecină. Exprimarea echilibrului în poziţia deplasată reprezintă mijlocul de determinare a forţei critice. Există mai multe căi de exprimare a echilibrului indiferent:

(1) Criteriul static, care cercetează situaţia de echilibru a forţelor raportate la poziţia deplasată. Pentru exprimarea echilibrului se poate recurge la cele două posibilităţi specifice de aplicare a condiţiei de echilibru static: ecuaţiile obişnuite de echilibru prin proiecţii şi momente, respectiv utilizarea principiului lucrului mecanic virtual.. Situaţia de echilibru considerată fiind cea din poziţia deplasată, înseamnă că orice deplasare virtuală trebuie dată de la această poziţie şi nu de la poziţia iniţială. Apare astfel deosebirea esenţială dintre modul de aplicare a principiului lucrului mecanic virtual în probleme de calcul de ordinul II şi de stabilitate, faţă de forma simplificată aplicată în statica liniară pe baza ipotezelor simplificatoare specifice acesteia.

Faptul că situaţia de echilibru indiferent corespunde unui anumit nivel de încărcare P_{cr} rezultă din constatarea că tendinţa de îndepărtare depinde direct de mărimea încărcării, în timp ce tendinţa de revenire depinde de poziţia deplasată impusă structurii. Egalarea tendinţelor corelează între ele forţele active şi pe cele reactive, sub forma echilibrului în poziţia deplasată, definind astfel limita domeniului de echilibru stabil.

(2) Criteriul energetic, care cercetează variaţia energiei potenţiale totale a structurii, ce corespunde trecerii în poziţia deplasată. Energia potenţială se compune din două părţi: (a) energia potenţială de poziţie a forţelor; (b) energia potenţială acumulată în structură. Cînd se impune trecerea într-o poziţie vecină, energia potenţială a forţelor scade deoarece îndepărtarea de poziţia iniţială se face în sensul lor de acţiune.

(3) Criteriul dinamic, care are caracter mai general decît primele două. Acest criteriu poate fi intuit direct, ţinînd seama de scăderea treptată a rigidităţii barelor puternic comprimate ale structurii, pe măsură ce forţele axiale cresc. Scăderii de rigiditate îi corespunde o creştere a perioadei de vibraţie proprie T (o scădere a pulsaţiei), astfel că apropierea de situaţia de echilibru indiferent –cînd rigiditatea

tinde să devină echivalentă cu zero- se identifică prin criteriul $T \to \infty$. Dificultăţile de calcul, datorită cărora aplicarea practică a criteriului se dovedeşte ineficientă de îndată ce se trece de cazuri foarte simple, provin din faptul că pentru stabilirea expresiei perioadei T trebuie utilizată condiţia de echilibru dinamic, scris pe baza principiului lui d'Alambert. Aceasta se exprimă sub forma unei condiţii de echilibru static convenţional, raportat la poziţia deformată, în care –pe lîngă forţele exterioare şi interioare ce intervin la primele 2 criterii trebuie introduse şi forţele de inerţie.

Dintre criteriile menţionate, în calculul geometric neliniar al structurilor elastice se utilizează de preferinţă criteriul static.

Echilibrul unei structuri se realizează în poziţia deformată a acesteia sub acţiunea încărcărilor exterioare, echilibru denumit echilibru elastic (fig.9.1).

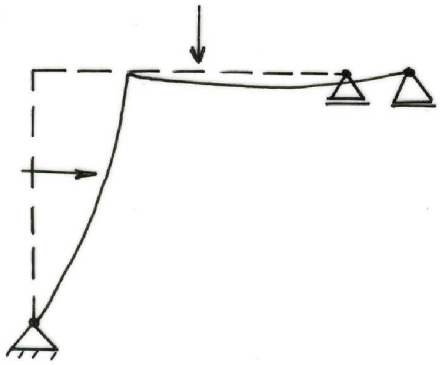


Figura 9.1 Structură acţionată de forţe în poziţia deformată şi poziţia nedeformată

Forma de echilibru elastic al unei structuri este stabilă pînă la o anumită valoare a încărcărilor exterioare, cînd poate trece într-o poziţie de echilibru instabil. Fenomenul de trecere a formei deformate a unei structuri dintr-o poziţie de echilibru stabil într-o poziţie de echilibru instabil poartă numele de pierdere de stabilitate .

Natura echilibrului unui corp rigid se poate analiza prin deplasarea corpului într-o poziţie vecină poziţiei iniţiale şi studierea tendinţei de mişcare după ce acesta este lăsat liber (fig.9.2).

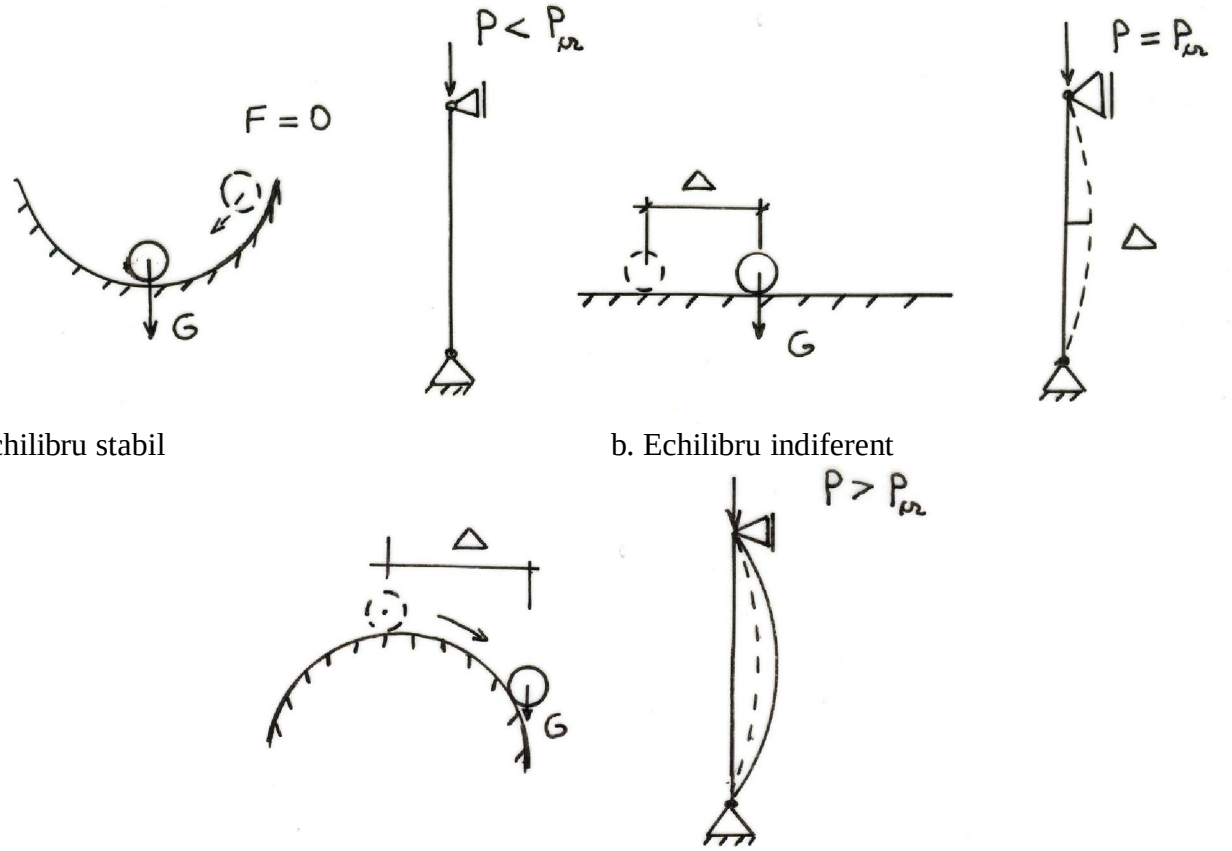
Dacă corpul are tendinţa de revenire la poziţia de echilibru, energia potenţială de poziţie este minimă ($\Delta U > 0$), echilibrul corpului este stabil (fig.9.2a). Dacă corpul rămîne în poziţia deplasată, energia potenţială este staţionară (($\Delta U = 0$), echilibrul corpului este indiferent (fig.9.2b), iar dacă are tendinţa de depărtare de poziţia de echilibru, energia potenţială este maximă ($\Delta U < 0$), echilibrul corpului este instabil (fig.9.2c).

În mod similar, pentru analiza naturii echilibrului elastic al formei deformate a unei structuri, trebuie studiată comportarea acesteia la acţiunea unei cauze perturbatoare care o deplasează în vecinătatea formei deformate iniţiale. Situaţia unei bare drepte, simplu rezemată, solicitată la o forţă de compresiune a cărei mărime creşte este prezentată în fig.9.2. Pentru o forţă de compresiune inferioară încărcării critice de flambaj, deformata auxiliară produsă de încărcarea perturbatoare F se apropie de deformata iniţială (forma rectilinie a barei) după ce cauza perturbatoare a fost îndepărtată. Bara rectilinie se găseşte în echilibru stabil (fig.9.2a). Pentru o forţă de compresiune egală cu încărcarea critică de flambaj, după îndepărtarea cauzei perturbatoare F, deformata auxiliară se depărtează de cea iniţială ajungînd într-o altă poziţie de echilibru. Bara se găseşte într-un echilibru indiferent (fig.9.2c).

Dacă forţa axială depăşeşte valoarea încărcării critice de flambaj, după îndepărtarea cauzei perturbatoare, deformata auxiliară se depărtează de cea iniţială, deplasările crescînd ireversibil pe măsură ce forţa axială creşte. Bara se găseşte în echilibru instabil (fig.9.2c).

Dacă pentru $P<P_{cr}$ forma rectilinie a axei barei este o formă de echilibru stabilă, pentru $P>P_{cr}$ forma rectilinie de echilibru este nestabilă, iar $P=P_{cr}$ constituie cazul limită pentru care bara se găseşte

în echilibru elastic indiferent, adică în afara formei de echilibru rectiliniu a axei barei sînt posibile şi forme curbe de echilibru elastic.



a. Echilibru stabil b. Echilibru indiferent

c. Echilibru instabil

Fig.9.2 Prezentarea celor trei cazuri de echilibru stabil, echilibru instabil, echilibru indiferent

Pierderea de stabilitate a echilibrului elastic sub acţiunea numai a forţei axiale de compresiune se caracterizează prin modificarea bruscă a formei deformate care se reflectă prin apariţia unei discontinuităţi în diagrama încărcare-deplasare în dreptul forţei critice (fig.9.3). Întrucît pentru $P=P_{cr}$ sînt teoretic posibile două forme distincte de echilibru: forma cu axa barei rectilinie, y=0 şi forma curbă cu $y \neq 0$, se constată apariţia unei bifurcări a echilibrului. În acest caz, fenomenul de pierdere a stabilităţii elastice poartă numele de flambaj prin bifurcare sau simplu, flambaj.

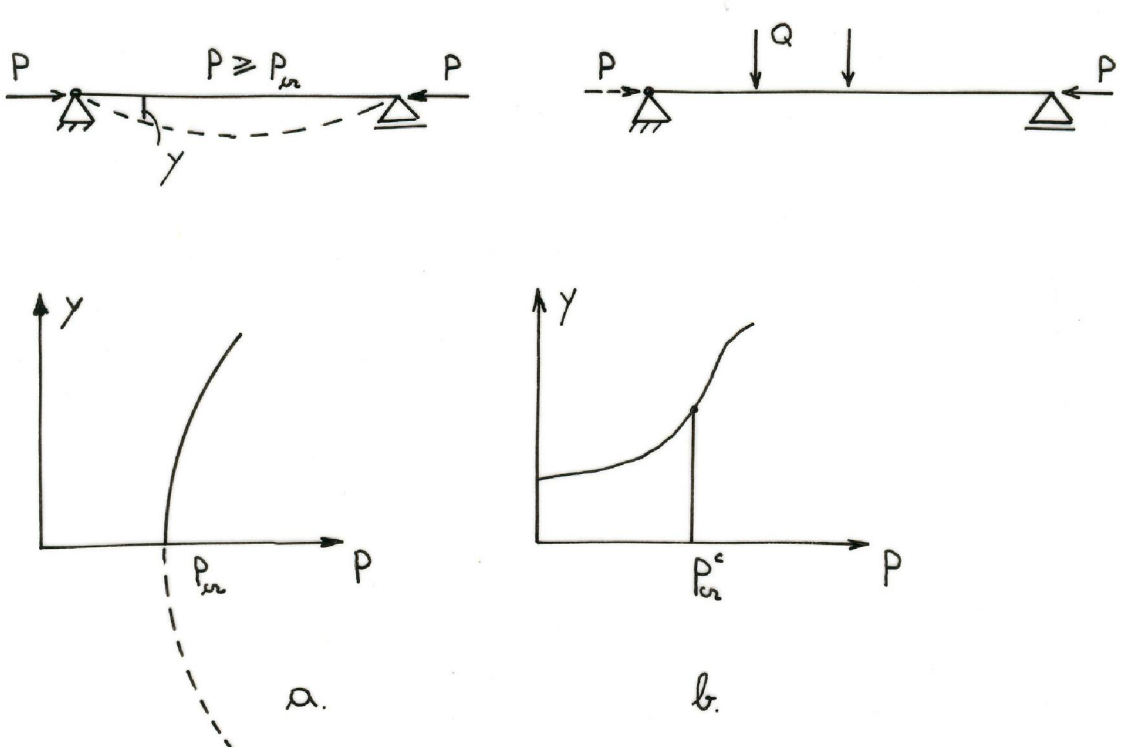


Figura 9.3 a. pierderea de stabilitate numai prin forţă axială b. acţiune concomitentă a forţei axiale de compresiune şi a forţelor transversale

Pierderea stabilităţii echilibrului elastic sub acţiunea concomitentă a forţei axiale de compresiune şi a forţelor transversale cu valoare constantă, se caracterizează printr-o variaţie neliniară a deplasărilor funcţie de intensitatea forţei de compresiune (fig.9.3b). În apropierea unei anumite valori a forţei axiale de compresiune notată P_{cr}^{c}, deplasările cresc extrem de rapid punînd în evidenţă o micşorare a rigidităţii barei. Valoarea lui P_{cr}^{c} este valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii echilibrului prin deformare continuă. Se poate demonstra că în domeniul elastic $P_{cr} = P_{cr}^{\ c}$. În realitate, datorită imposibilităţii eliminării cauzelor care produc deplasări transversale axei barei (excentricităţi, curburi iniţiale, forţe transversale etc.), există numai flambaj prin deformare continuă, dar studiul fenomenului de flambaj prin bifurcare prezintă importanţă prin faptul că forţa critică stabilită P_{cr} este aceeaşi cu forţa critică de pierdere a stabilităţii prin deformare continuă P_{cr}^{c} şi se determină mai uşor.

Pierderea stabilităţii echilibrului elastic poate avea loc şi la alte tipuri de solicitări. Astfel, în cazul grinzilor solicitate la încovoiere, cu secţiune transversală îngustă, pentru o anumită valoare a încărcării transversale, grinda îşi pierde stabilitatea deplasîndu-se lateral printr-o solicitare de încovoiere şi torsiune. Acest tip de pierdere a stabilităţii elastice poartă numele de flambaj lateral.

9.2 Flambajul barei drepte solicitată la compresiune centrică în stadiul elastic

Forma de echilibru rectilinie a unei bare drepte solicitată la compresiune (fig.9.4a) este stabilă pentru $P < P_{cr}$. Cînd forţa axială de compresiune ajunge la valoarea $P=P_{cr}$. forma de echilibru rectilinie devine instabilă, axa barei se poate deforma deplasîndu-se transversal, trecînd într-o nouă poziţie de echilibru elastic. În această stare deformată, deplasarea transversală a unui punct la distanţa x situat pe axa barei este y(x) (fig.9.4b), iar în poziţia deplasată a secţiunii momentul încovoietor are expresia:

(9.1) K $M(x) = P_{cr} y(x)$

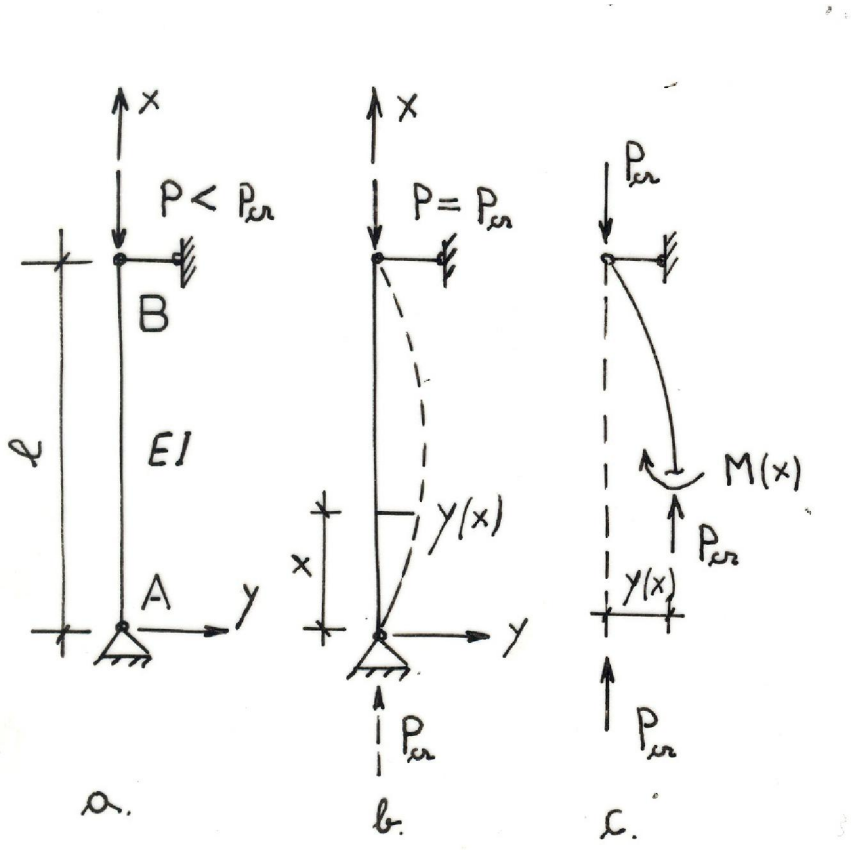


Fig.9.4 Forma de echilibru a unei bare drepte solicitată la compresiune

Dacă se consideră deplasările y(x) mici, se poate utiliza pentru exprimarea deplasării unui punct curent al axei barei ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate:

(9.2) K $\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$ şi introducînd relaţia 9.1 în relaţia 9.2 se obţine:

(9.3) K $\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI}y(x) = 0$

Notînd : $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$ ecuaţia 9.3 devine:

(9.4) K $\frac{d^2y(x)}{dy^2} + k^2y(x) = 0$

care este o ecuaţie diferenţială liniară, omogenă, de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Soluţia acestei ecuaţii este:

(9.5) K $y(x) = C_1\sin(kx) + C_2\cos(kx)$

Funcţia y(x) reprezentînd ecuaţia formei deformate în momentul pierderii echilibrului elastic, trebuie să satisfacă condiţiile la limită corespunzătoare reazemelor barei.

a) reazemul articulat A(x=0), y(0)=0, rezultînd C_2=0 şi în consecinţă ecuaţia se reduce la:

(9.6) K $y(x) = C_1 \sin(kx)$

b) în reazemul simplu B(x=l), y(l)=0 care introduse în relaţia (9.6) se obţine:

(9.7) K $C_1 \sin kl = 0$

Relaţia (9.7) poate fi satisfăcută pentru:

a) C_1=0, deci y(x)=0, grinda rămîne cu axa rectilinie, soluţie care nu interesează;

b) $\sin kl = 0$,ale cărei soluţii posibile sînt:

$kl = 0, \pi, 2\pi, ...n\pi$ (n-număr întreg)

Soluţia kl=0 conduce la k=0 şi P=0, adică situaţia barei neîncărcate, soluţia nu interesează.

Folosind soluţia $kl = \pi$ şi relaţia $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$ va rezulta valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii:

(9.8) K $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

(9.9) K $y(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x$

Deci forţei critice de pierdere a stabilităţii P_{cr} îi corespunde o formă deformată după care flambează bara, care poartă numele de formă proprie de flambaj asociată lui P_{cr}.

Constanta de integrare C_1 rămîne nedeterminată, caracteristic echilibrului indiferent, şi în consecinţă nu se poate preciza sensul şi valoarea deplasărilor în momentul pierderii stabilităţii grinzii. În cazul $kl = \pi$, forma proprie de flambaj este o sinusoidă cu o semiundă.

Soluţia generală $kl = n\pi$ conduce la expresia forţei critice de flambaj:

(9.10) K $P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$ şi la forma proprie de flambaj asociată acesteia.

(9.11) K $y(x) = C_1 \sin n\frac{\pi}{l} x$ care este o sinusoidă cu m semiunde.

Din punct de vedere practic interesează numai prima soluţie, n=1, care stabileşte cea mai mică forţă critică de flambaj, deci situaţia cea mai periculoasă.

Relaţia (9.10) poate fi scrisă sub forma: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2}$

unde l/n reprezintă lungimea unei semiunde de sinusoidă.

Definind lungimea de flambaj l_f ca fiind distanţa dintre două puncte succesive de inflexiune ale formei proprii de flambaj şi notînd $l_f = \frac{l}{n}$ rezultă expresia generală a forţei critice (formula lui Euler).

(9.12) K $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^{\,2}}$

Formula lui Euler permite stabilirea forţei critice de flambaj pentru toate tipurile de bare, indiferent de legăturile capetelor acesteia dacă se precizează lungimea de flambaj.

Pentru cazuri simple, lungimea de flambaj se stabileşte prin observaţii directe asupra curbei deformate după care poate flamba bara.

9.3 Stabilitatea sistemelor cu număr finit de grade de libertate

Numărul de parametri geometrici, liniar independenţi, care permit determinarea poziţiei deformate (sau deplasate) a structurii, în momentul premergător pierderii stabilităţii reprezintă gradele de libertate în problemele de stabilitate

Structurile de rezistenţă, în mod obişnuit, sînt structuri cu un număr infinit de grade de libertate (fig.9.6a,b). Anumite structuri de rezistenţă au o rigiditate a anumitor elemente mult mai mare decît a altora, în consecinţă elementele de rezistenţă care au o rigiditate mai mare pot fi considerate ca fiind cu rigiditate infinită.

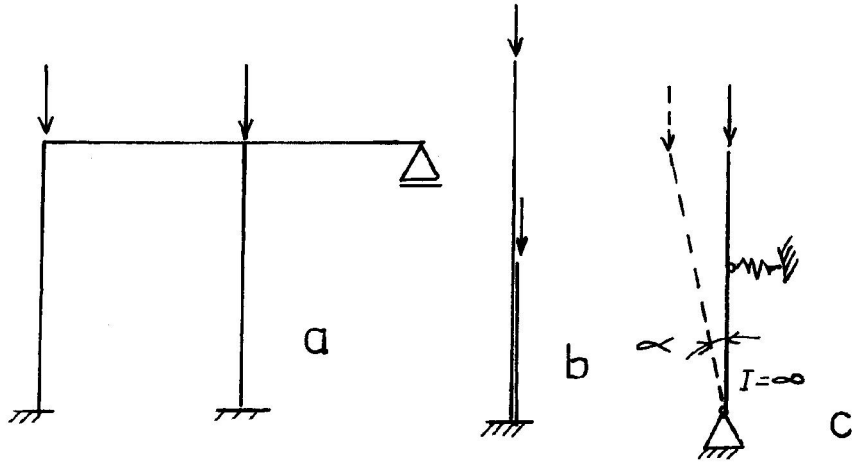


Fig.9.6 Structură cu număr finit de grade de libertate

O structură acţionată de forţe axiale puternice trebuie să fie în echilibru, iar acest echilibru trebuie să fie stabil. Limita de echilibru stabil se atinge în situaţia de echilibru indiferent, caracterizată prin faptul că impunînd structurii trecerea din poziţia iniţială într-o poziţie vecină compatibilă şi lăsînd-o apoi liberă, structura rămîne în acea poziţie. S-a arătat că în situaţia de echilibru indiferent se realizează un echilibru între tendinţa de îndepărtare dată de forţele active (sarcinile axiale) şi tendinţa de revenire ce corespunde forţelor reactive (reacţiuni şi forţe interioare) care se nasc drept consecinţă a trecerii în poziţia vecină. Exprimarea echilibrului în poziţia deplasată reprezintă mijlocul de determinare a forţei critice.

Calculul de stabilitate al sistemelor cu număr finit de grade de libertate permite determinarea valorii forţei critice de pierdere a stabilităţii.

Calculul se poate efectua prin mai multe metode, dintre care cel mai des utilizate, funcţie de tipul problemei sînt:

(1) *Criteriul static*, care cercetează situaţia de echilibru a forţelor raportate la poziţia deplasată. Pentru exprimarea echilibrului se poate recurge la cele două posibilităţi specifice de aplicare a condiţiei de echilibru static: ecuaţiile obişnuite de echilibru prin proiecţii şi momente, respective utilizarea principiului lucrului mecanic virtual. Situaţia de echilibru considerată fiind cea din poziţia deplasată, înseamnă că orice deplasare virtuală trebuie dată de la această poziţie şi nu de la poziţia iniţială.

(2) *Criteriul energetic* care cercetează variaţia energiei potenţiale totale a structurii, ce corespunde trecerii în poziţia deplasată. Energia potenţială se compune din două părţi: (a) energia potenţială de poziţie a forţelor; (b) energia potenţială acumulată în structură. Cînd se impune trecerea într-o poziţie vecină, energia potenţială a forţelor scade deoarece îndepărtarea de poziţia iniţială se face în sensul lor

de acţiune; scăderea se măsoară prin lucrul mecanic pozitiv dat de forţe (L_e). În acelaşi timp, energia potenţială a structurii creşte datorită deformării, crşterea fiind măsurată printr-un lucru mecanic negativ ce corespunde forţelor interioare (L_i) care se opun.

Variaţia totală a energiei se măsoară prin suma agebrică a celor două componente L_e+L_i. Este cunoscut că pentru poziţia de echilibru a unui sistem elastic , energia potenţială totală atinge o valoare extremă. Ipunînd o îndepărtare a structurii de poziţia iniţială, teoremele arată că echilibrul iniţial era stabil, instabil sau indiferent după cum variaţia energiei potenţiale totale este pozitivă, negativă sau nulă. Aceasta înseamnă că echilibrului stabil îi corespunde un minimum, iar echilibrului instabil- un maximum al energiei potenţiale totale. Pentru situaţia de echilibru indiferent, care serveşte drept criteriu de identificare a încărcării critice, condiţia este $L_e+L_i=0$.

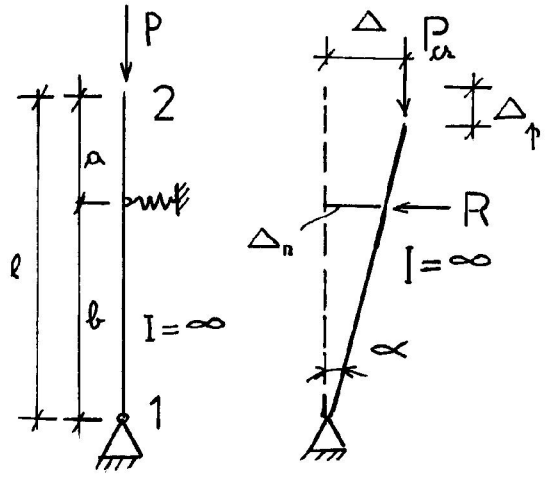


Fig.9.7 Sistem cu număr finit de grade de libertate

Fie sistemul din fig.9.7. Resortul elastic are caracteristica de rigiditate cunoscută şi egală cu k. Forţa axială P creşte treptat, astfel încît pentru valoarea P_{cr} bara infinit rigidă părăseşte poziţia verticală şi se roteşte cu unghiul α, rămînînd în echilibru stabil la limită. În acestă poziţie deplasată unghiul α este suficient pentru a definii poziţia tuturor punctelor barei. Valoarea forţei critice se va determina prin metoda statică şi prin metoda lucrului mecanic total.

Metoda statică. Se scrie condiţia de echilibru static, pe forma deplasată, ca ecuaţie de momente în raport cu articulaţia 1.

$\sum M_1 = 0; \text{K}\, P_{cr} \cdot \Delta - R \cdot b = 0$

Pentru Δ şi R rezultă expresiile:

$\Delta = \alpha l \quad R = k\Delta_r = k\alpha b$

Înlocuind în ecuaţia de momente se obţine:

$$P_{cr} = \frac{Rb}{\Delta} = \frac{kb^2}{l}$$

Metoda lucrului mecanic total

$L_{tot} = L_{ext} + L_{\text{int}} = 0 \text{ sau } L_{ext} = -L_{\text{int}}$

$L_{ext} = P_{cr} \cdot \Delta_p = P_{cr} l(1-\cos\alpha)$

În acest caz forţa P_{cr} parcurge deplasarea Δ_p cu întreaga sa intensitate:

Dezvoltînd cos α în serie şi reţinînd numai primii doi termeni se obţine $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$. Introducînd în expresia lucrului mecanic exterior rezultă:

$$L_{ex} = P_{cr} \cdot l \cdot \frac{\alpha^2}{2}$$

Lucrul mecanic interior, este un lucru mecanic rezistent, deci va fi efectuat cu semnul minus. Acest lucru mecanic este produs de reacţiunea R parcurgînd deplasarea punctului său de aplicaţie, dar pe măsură ce deplasarea Δ_r creşte, creşte şi reacţiunea R, astfel încît lucrul mecanic interior este:

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{2} R\Delta_r = -\frac{1}{2} k\Delta_r\Delta_r = k\alpha^2 b^2$$

Egalînd expresiile celor două lucruri mecanice rezultă forţa critică:

$$P_{cr} = \frac{kb^2}{l}$$

Obs. Se constată că parametrul α se simplifică şi rămîne nedeterminat.

Exemplul 9.1: Să se determine forţa critică de pierdere a stabilităţii la sistemul cu număr finit de grade de libertate din figura 9.8.

În cazul în care forta P atinge valoarea P_{cr} , bara infinit rigidă se roteşte cu unghiul α iar structura se deformează.

Pentru determinarea lucrului mecanic interior este necesar să se rezolve cadrul cu noduri fixe încărcat cu rotirea α a stîlpului de rigiditate infinită.

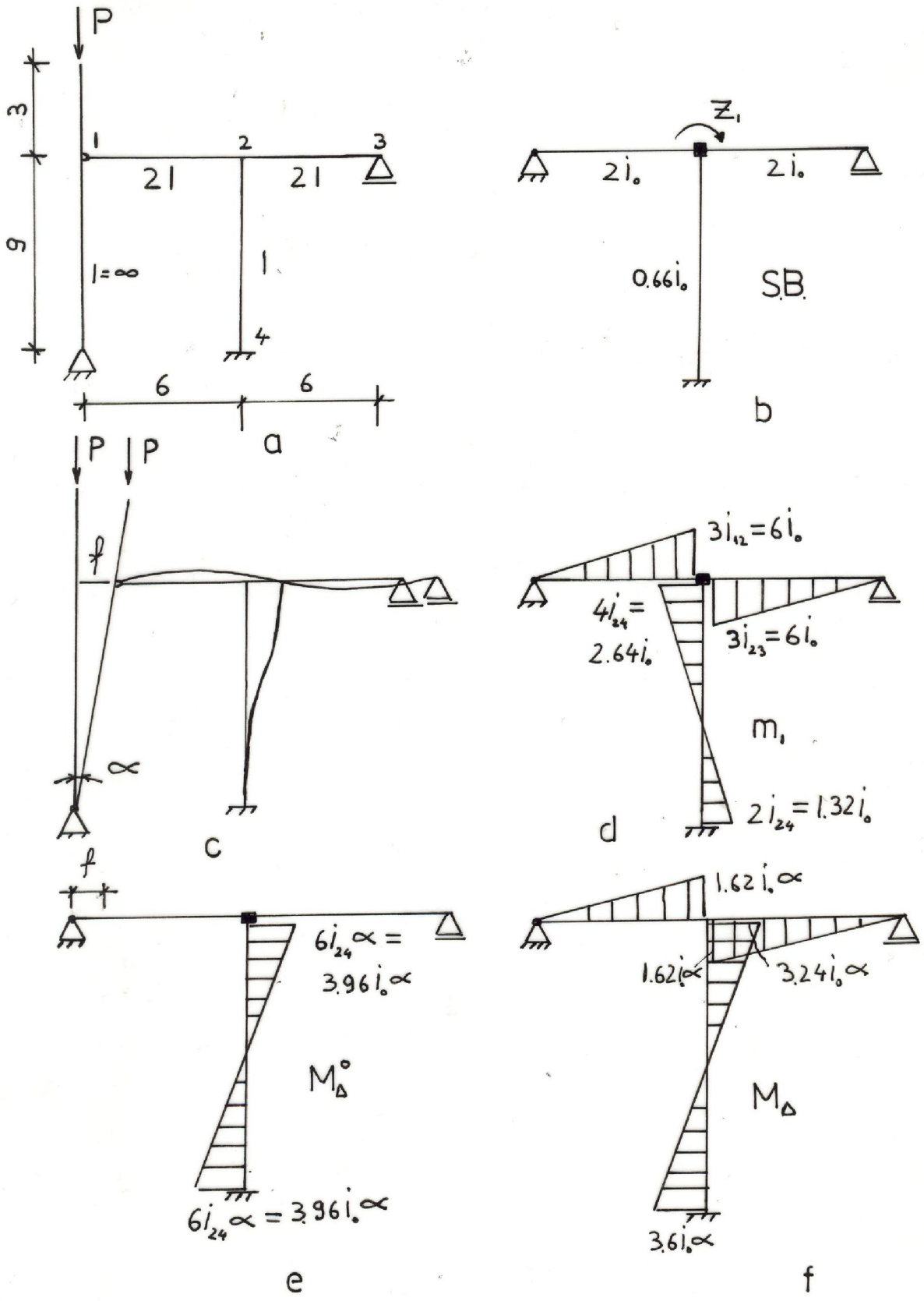


Fig.9.8 Exemplu calcul de stabilitate; b. sistem de bază; c.formă deformată

Rigiditatea de comparaţie se alege $i_o = \frac{EI}{6}$ astfel încît rigidităţile practice devin: $i_{12} = 2i_0 \,; i_{24} = \frac{EI}{9}\frac{6}{6} = 0{,}66 i_0$.

Diagrama unitară se obţine din rotirea unitară a nodului rigid iar diagrama $M_\Delta{}^0$ se obţine prin translaţia nodului rigid cu f.

Reacţiunea r_{11} se obţine prin izolare de nod, ecuaţia de echilibru avînd forma: $r_{11} - 6i_o - 2{,}64i_o - 6i_o = 0 \,;\; r_{11} = 14{,}64 i_o$

Termenul liber R_{1p} se obţine tot prin izolare de nod, astfel ecuaţia de echilibru are forma:

$R_{1p} + 3{,}96 i_o \alpha = 0$

Ecuaţia de condiţie în acest caz este: $r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0$, astfel $Z_1 = \frac{3{,}96 i_o \alpha}{14{,}64 i_o} = 0{,}27\alpha$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte astfel:

$M_{21} = 6i_o \cdot 0{,}27\alpha = 1{,}62 i_0 \alpha$

$M_{23} = 6i_o \cdot 0{,}27\alpha = 1{,}62 i_o \alpha$

$M_{24} = -3{,}96 i_o \alpha + 2{,}64 i_o \cdot 0{,}27\alpha = -3{,}24 i_o \alpha$

$M_{42} = -3{,}96 i_o \alpha + 1{,}32 i_o \cdot 0{,}27\alpha = -3{,}6 i_o \alpha$

Lucrul mecanic exterior este: $L_{ext} = P_{cr} \Delta_p = \frac{1}{2} P_{cr} \cdot b \cdot \alpha^2$

Lucrul mecanic interior: $L_{\text{int}} = -\frac{1}{2} H_1 \cdot f$

$H_1 = T_{24} = \frac{3{,}6 i_o \alpha + 3{,}24 i_o \alpha}{9} = 0{,}76 i_o \alpha$

Egalînd cele 2 lucruri mecanice se obţine:

$\frac{1}{2} P_{cr} \cdot 12 \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}76 i_o \alpha \cdot 9 \cdot \alpha \rightarrow P_{cr} = 0{,}57 i_o$

Diagrama finală este prezentată în fig. 9.8f

Exemplul 9.2: Să se determine forţa critică de pierdere a stabilităţii la sistemul cu număr finit de grade de libertate din figura 9.9 încărcat cu rotaţia α a stîlpului de rigiditate infinită.

În momentul în care forţa P atinge valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii, cadrul se deformează. Pentru determinarea lucrului mecanic interior se rezolvă structura al cărei sistem de bază l-am prezentat în fig. 9.9d.

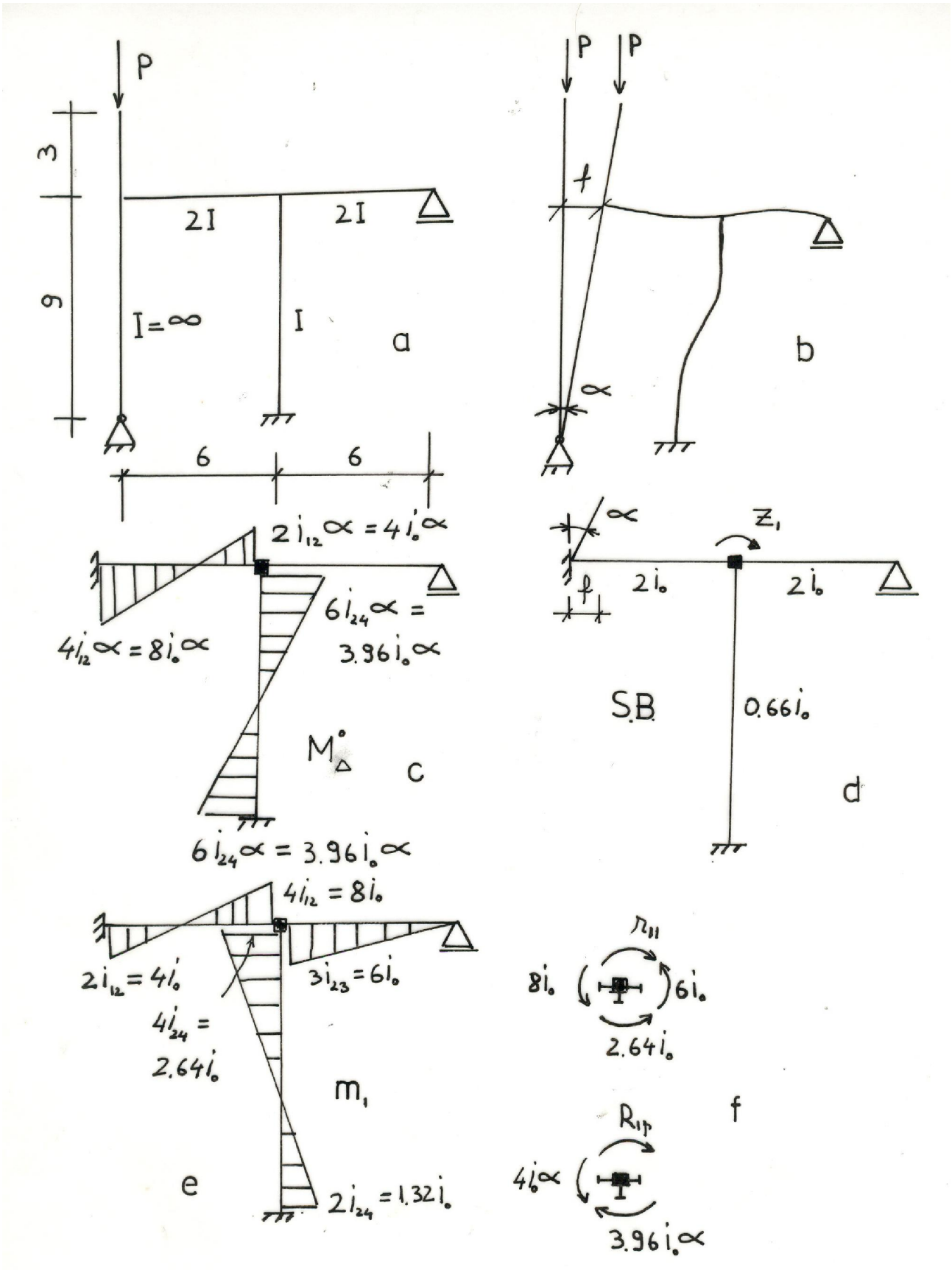


Fig.9.9 Exemplu calcul de stabilitate

Diagrama $M_\Delta{}^0$ se obţine din încărcarea sistemului de bază cu rotirea nodului 1 cu unghiul α şi din translaţia nodului rigid 2 cu valoarea f=9α.

Reacţiunea r_{11} se obţine din izolare de nod obţinîndu-se $r_{11} = 16{,}64 i_o$ iar reacţiunea $R_{1\Delta}$ tot prin izolare de nod obţinîndu-se $R_{1\Delta} = 0 \rightarrow Z_1 = 0$. Deci $M = M_\Delta{}^0$, deoarece $m_1 Z_1 = 0$

Calculul lucrului mecanic interior se va face folosind diagrama $M_\Delta{}^0$ astfel:

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{2} M_1 \cdot \alpha - \frac{1}{2} H_1 \cdot f$$

$$M_1 = 8 i_o \alpha$$

$$H_1 = \frac{4 i_o \alpha + 4 i_o \alpha}{9} = \frac{8 i_o \alpha}{9} = 0{,}88 i_o \alpha$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \cdot 8 i_o \cdot \alpha \cdot \alpha - \frac{1}{2} \cdot 0{,}88 i_o \alpha \cdot 9 \cdot \alpha = -\frac{1}{2} 15{,}92 i_o \alpha^2$$

$$\frac{1}{2} P_{cr} \cdot 12 \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} 15{,}92 i_o \alpha^2$$

$$P_{cr} = 1{,}32 i_o$$

9.4 Stabilitatea cadrelor prin metoda deplasărilor

Calculul de stabilitate se realizează preponderent utilizînd metoda deplasărilor. Utilizarea metodei deplasărilor printr-un calcul manual este posibilă numai în cazul unui număr redus de necunoscute. Pentru structurile mari este imperios necesar utilizarea programelor automate.

Condiţia care se pune în calculul de stabilitate este că în barele structurii apar numai eforturi axiale.

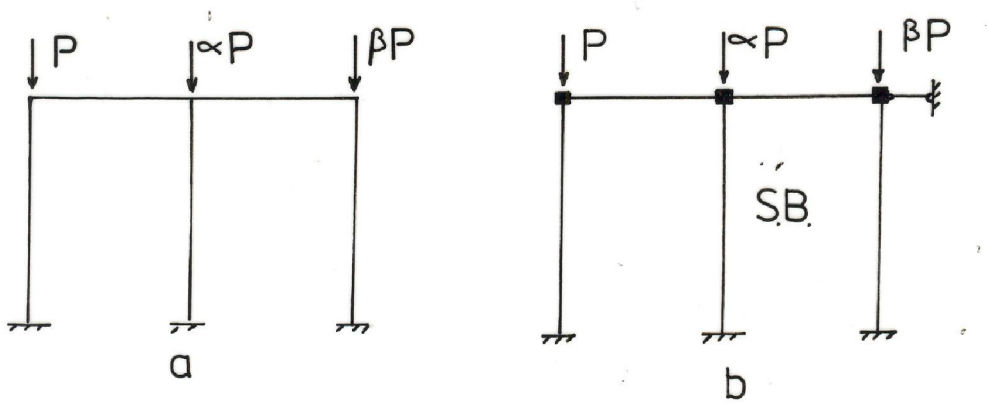


Fig.9.10 a)structură iniţială; b)sistem de bază

Condiţia care se pune este ca sistemul de bază (fig.9.10b), încărcat cu forţele exterioare, cu rotirile de nod şi translaţiile pe direcţiile gradelor de libertate, să se comporte identic cu structura reală, rezultă sistemul de ecuaţii al metodei deplasărilor care în acest caz are forma:

$$(9.16)\ \mathrm{K}\ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} z_j = 0\ \mathrm{K}\ (i = 1,2,...n)$$

Termenii liberi sînt nuli deoarece forţele sînt aplicate în noduri şi diagrama $M_p{}^0$=0.
O ecuaţie a acestui sistem are expresia:

$$(9.17)\ \mathrm{K}\ r_{i1}z_1 + r_{i2}z_2 + ... + r_{ii}z_i + ... + r_{in}z_n = 0$$

Eforturile care apar în barele comprimate ale sistemului de bază, din încărcarea cu deplasările unitare, rotiri sau translaţii de noduri, vor fi corectate cu funcţiile de corecţie corespunzătoare care introduc efectul forţei axiale asupra momentului încovoietor şi a forţei tăietoare.

Sistemul de ecuaţii este un sistem de ecuaţii omogene şi admite două tipuri de soluţii:
-soluţia z_i=0 soluţia nu este interesantă întrucît presupune că structura a rămas în echilibru în poziţia iniţială nedeformată.
-soluţia $z_i \neq 0$ este corespunzătoare condiţiei ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie egal cu zero, $D\left|r_{ij}\right| = 0$

Forma dezvoltată a acestei condiţii este:

$$(9.18)\ \mathrm{K}\ D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Condiţia (9.13) reprezintă ecuaţia de stabilitate sau ecuaţia caracteristică. Ecuaţia de stabilitate este o ecuaţie transcendentă şi se rezolvă prin încercări .
Calculul de ordinul I corespunde condiţiei ca parametrul de încărcare axială să fie nul, v=0, determinantul coeficienţilor necunoscutelor este mai mare ca zero, $D\left|r_{ij}\right| > 0$

În calculul de stabilitate, parametrul de încărcare axială capătă valori diferite de zero şi din ce în ce mai mari iar valoarea determinantului coeficienţilor necunoscutelor, variază avînd valori pozitive, dar din ce în ce mai mici. Astfel pentru $v=v_{cr}$ se obţine $D\left|r_{ij}\right| = 0$ ceea ce corespunde poziţiei de echilibru indiferent. Condiţia $D\left|r_{ij}\right| < 0$ corespunde situaţiei $v>v_{cr}$ deci structura se află în stadiul post critic.

Aceste ultime două observaţii constituie criteriul de reducere a numărului de încercări în rezolvarea ecuaţiei de stabilitate. Ecuaţia (9.18) reprezintă matricea de rigiditate a structurii, corespunzătoare echilibrului stabil la limită. În momentul pierderii stabilităţii rigiditatea de ansamblu a structurii devine egală cu zero.

9.5 Stabilitatea structurilor simetrice

Există şi în acest caz posibilitatea de a simplifica rezolvarea utilizînd procedeul semistructurilor, cunoscut din statica liniară, cînd este îndeplinită condiţia arătată la calculul de ordinul II: alături de simetria structurii , trebuie să existe şi simetria încărcării, astfel că perechile de bare puternic comprimate dispuse simetric să aibă aceiaşi factori de compresiune.

Spre deosebire de calculul de ordinul II, pentru încărcarea simetrică deformata critică poate avea configuraţie simetrică sau antisimetrică. Această proprietate se poate demonstra pornind de la forma generală a oricăreia dintre cele două metode, prin alegerea unui sistem de bază simetric şi utilizînd numai necunoscute simetrice şi antisimetrice. Considerînd de exemplu metoda deplasărilor şi notînd cu Z_1 …Z_p necunoscutele simetrice, respectiv Z_q …Z_n necunoscutele antisimetrice (numerotate în această ordine) ecuaţiile de condiţie se reduc la forma:

$$\begin{bmatrix} r^{(s)} & 0 \\ 0 & r^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{(s)} \\ Z^{(a)} \end{bmatrix} = [0]$$

unde apar submatricele de reacţiuni unitare:

$$r^{(s)} = \begin{bmatrix} r_{11} \dots & r_{1p} \\ r_{p1} \dots & r_{pp} \end{bmatrix} \text{şi } r^{(a)} = \begin{bmatrix} r_{qq} \dots & r_{qn} \\ r_{nq} & r_{nn} \end{bmatrix}$$

prima cuprinzînd coeficienţii la care ambii indici se referă la necunoscute simetrice, iar a doua –la necunoscute antisimetrice.

Ecuaţia de stabilitate se scrie în acest caz:

$$D[r] = \begin{bmatrix} D[r^{(s)}] & 0 \\ 0 & D[r^{(a)}] \end{bmatrix} = D[r^{(s)}] \cdot D[r^{(a)}] = 0$$

care se descompune în două ecuaţii de stabilitate distincte:

$D[r^{(s)}] = 0$ şi $D[r^{(a)}] = 0$

Prima presupune că necunoscutele simetrice sînt diferite de zero şi deci corespunde unei deformate critice simetrice, în timp ce a doua presupune că necunoscutele antisimetrice sînt diferite de zero şi deci corespunde unei deformate critice antisimetrice.

Rezultă că, pentru verificarea la stabilitate a unei structuri simetrice şi simetric încărcate, este necesar să se considere ambele forme efectuînd două rezolvări distincte: una considerînd o deformată critică simetrică şi alta o deformată critică antisimetrică. Aceasta revine la a studia pierderea de stabilitate pentru cele două semistructuri, determinînd mărimile corespunzătoare ale parametrului critic, dintre care se reţine cea mai mică. La cadre cu noduri deplasabile se dovedeşte de obicei mai dezavantajoasă deformata critică antisimetrică. La cadre cu noduri fixe, deseori inspectarea legăturilor celor două semistructuri este suficientă pentru a stabili care este cazul defavorabil.

De observat că în deformata simetrică pe stîlpi sînt două puncte de inflexiune, iar rigla nu prezintă puncte de inflexiune.

Pierderea stabilităţii structurilor simetrice încărcate simetric se studiază utilizînd fie procedeul grupării necunoscutelor, fie procedeul semistructurilor.

Procedeul grupării necunoscutelor. Se grupează necunoscutele în necunoscute grupate simetric şi necunoscute grupate antisimetric.

Din încărcarea cu necunoscutele grupate simetric, reacţiunile pe direcţiile necunoscutelor grupate antisimetric sînt zero şi invers. Rezultă că determinantul coeficienţilor necunoscutelor se împarte în doi determinanţi distincţi, iar ecuaţia de stabilitate devine:

$$(8.19)\ \text{K}\ D\left|r_{ij}\right| = D\left|r_s\right| x D\left|r_{as}\right| = 0$$

ceea ce implică studierea ambelor moduri de pierdere a stabilităţii.

Se reaminteşte că în acest procedeu calculul se conduce pe întreaga structură.

Procedeul semistructurilor. Semistructurile sînt nişte structuri convenţionale obţinute prin secţionarea structurii reale în axa de simetrie şi introducerea în aceste secţiuni a unor legături care să respecte următoarele condiţii:

-să permită deformarea semistructurii identică cu deformarea ei în structura reală;

-în aceste legături să apară aceleaşi eforturi ca şi în secţiunile de pe axa de simetrie ale structurii reale.

Tipurile de legături ce se introduc în axa de simetrie, în calculul de stabilitate depind de:

-particularitatea structurii în axa de simetrie

-modul de pierdere a stabilităţii studiat (prin deformată simetrică sau prin deformată antisimetrică). În figura 9.11 sînt reprezentate deformatele corespunzătoare pierderii de stabilitate simetrică (b) şi antisimetrică (c).

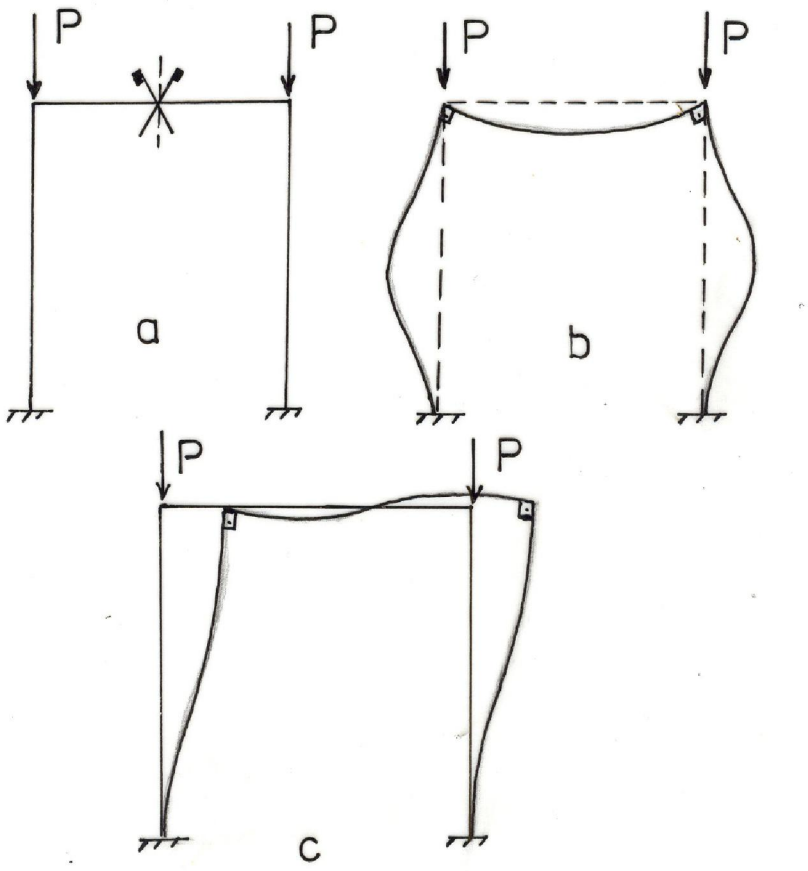


Fig.9.11 Moduri de pierdere a stabilităţii simetrică şi antisimetrică

Obs. La cadrele simetrice cu noduri deplasabile la care stîlpii sînt comprimaţi axial, pierderea de stabilitate are loc prin deformata antisimetrică, care conduce la valoarea minimă a parametrului de încărcare axială.

Exemplul 9.1: Să se determine valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii pentru structura din figura 9.12 . EI=18oooKNm^2

Calculul rigidităţilor practice:

$$i_0 = \frac{EI}{6}; i_{24} = \frac{2EI}{4}\cdot\frac{6}{6} = 3i_0;\ i_{45} = \frac{EI}{3}\frac{6}{6} = 2i_o$$

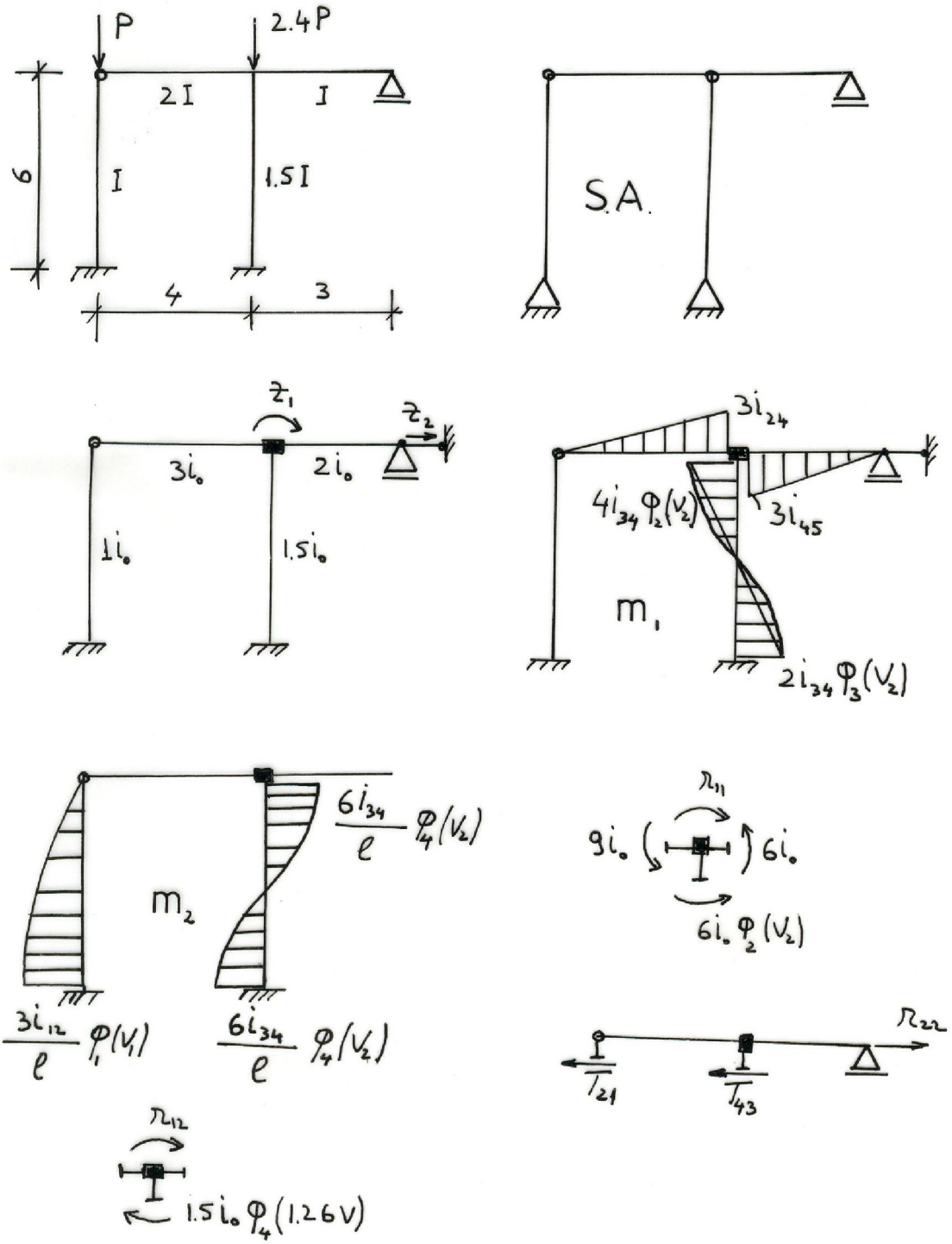


Fig.9.12 Exemplu calcul de stabilitate

Calcul parametrii de încărcare axială: $v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$; $v_1 = v = 6\sqrt{\frac{P}{EI}}$; $v_2 = 6\sqrt{\frac{2{,}4P}{1{,}5EI}} = 1{,}26v$

Condiţia care se pune este ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie nul.

$$D=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}=0$$

$$r_{11}=15i_0+6i_0\phi(1{,}26v)$$

$$r_{22}=T_{21}+T_{43}$$

$$T_{21}=\frac{3i_{12}}{l^2}\eta_1(v_1)$$

$$T_{43}=\frac{12i_{43}}{l^2}\eta_2(v_2)\ \rightarrow r_{22}=\frac{3i_{12}}{l^2}\eta_1(v_1)+\frac{12i_{34}}{l^2}\eta_2(v_2)=0{,}083i_o\eta_1(v)+0{,}5i_0\eta_2(1{,}26v)$$

r_{12} se obţine prin izolare de nod: $r_{12}=-1{,}5i_o\phi_4(1{,}26v)$

$$D=\begin{vmatrix} 15i_0+6i_0\phi_2(1{,}26v) & -1{,}5i_0\phi_4(1{,}26v) \\ -1{,}5i_0\phi_4(1{,}26v) & 0{,}008i_0\eta_1(v)+0{,}5i_0\eta_2(1{,}26v) \end{vmatrix}$$

$$v(1)=1{,}5\rightarrow\phi_2(1{,}89)=0{,}8749;\eta_1(1{,}5)=0{,}089$$

$$\phi_4(1{,}89)=0{,}9388\ ;\ \eta_2(1{,}89)=0{,}64121$$

$$D(1)=\begin{vmatrix} 20{,}24 & -1{,}408 \\ -1{,}408 & 0{,}32 \end{vmatrix}=0{,}32\cdot 20{,}24-(1{,}4)^2=4{,}51\rightarrow v<v_{cr}$$

$$v(2)=2\rightarrow\phi_2(2{,}52)=0{,}7679$$

$$\phi_4(2{,}52)=0{,}8889$$

$$\eta_1(2)=-0{,}637$$

$$\eta_2(2{,}52)=0{,}3597$$

$$D(2)=\begin{vmatrix} 19{,}56 & -1{,}33 \\ -1{,}33 & 0{,}12 \end{vmatrix}=0{,}74$$

O interpolare liniară se poate face cu relaţia $v_{cr}=\frac{D(1)\cdot v(2)-D(2)\cdot v(1)}{D(1)-D(2)}$ în vederea apropierii de soluţia exactă:

$$v_{cr}=\frac{4{,}5\cdot 2-0{,}7\cdot 1{,}5}{4{,}5-0{,}7}=2{,}09\rightarrow v_{cr}=2{,}09$$

unde D(1) şi D(2) sînt două valori ale determinantului la care diferenţa dintre ele să fie cît mai mică, iar v(1) şi v(2) sînt parametrii de încarcare axială corespunzători celor două valori ale determinantului. Iteraţiile sînt suficiente în momentul în care pentru ultimul v_{cr} obţinut valoarea determinantului, în modul, să fie mai mică de 0,2.

Valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii se stabileşte cu relaţia $P_{cr}=\frac{v_{cr}{}^2EI}{l^2}$;

$$P_{cr}=\frac{2{,}09^2\cdot 18000}{6^2}=2184KN$$

Exemplul 9.2: Pentru structura din figura 9.13 să se determine forţa axială critică şi lungimea de flambaj.

1.Forţa axială şi parametrul de încărcare axială în bara puternic comprimată:

$$N_{43} = P; v_1 = l_{43}\sqrt{\frac{N_{43}}{EI_{43}}} = 4\sqrt{\frac{P}{2EI}} = v$$

Structura este cu noduri fixe, singura necunoscută fiind rotirea nodului 1; bara puternic comprimată este dublu încastrată.

2.Calculul elementelor matricei de rigiditate:

Se calculează reacţiunea r_{11} din blocajul de nod:

$$r_{11} = 3i_o + 4i_o + 8i_o\phi_2(v)$$

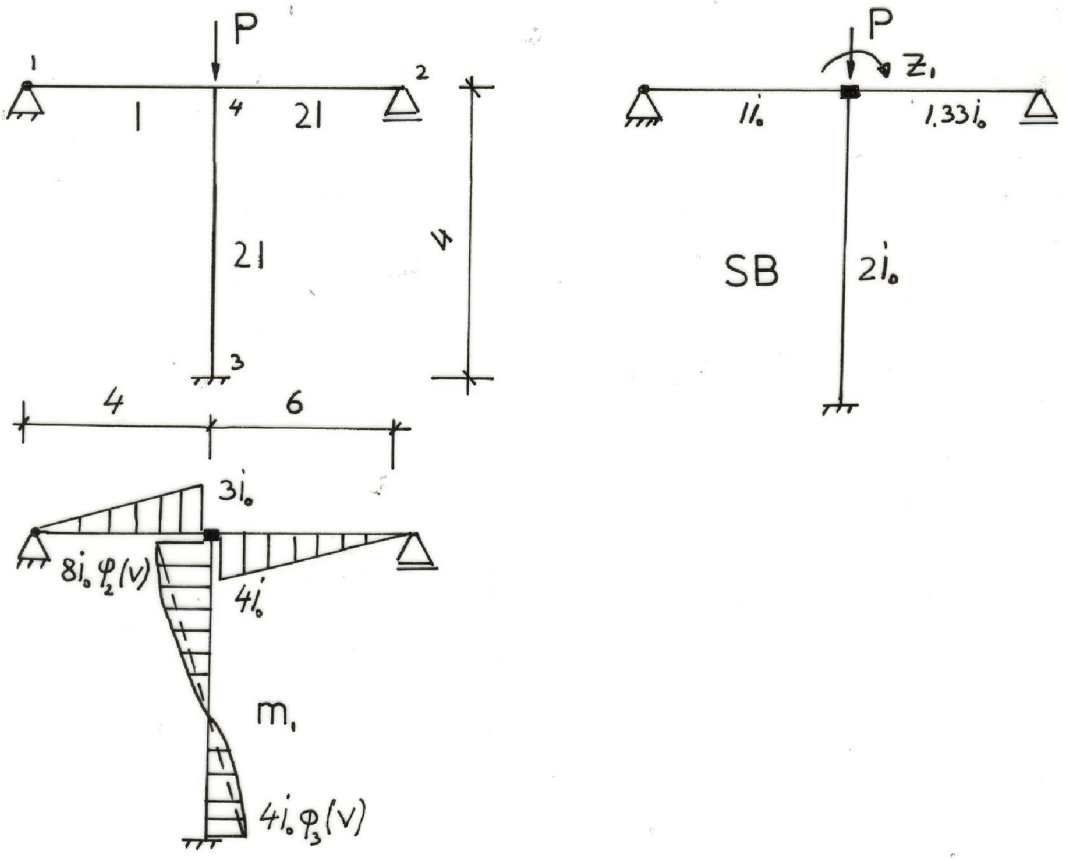


Figura 9.13 Structură iniţială, sistem de bază şi diagramă unitară

Ecuaţia de stabilitate este: $r_{11} = 0$, satisfăcută de $\phi_2(v) = -0{,}875$

Pentru $\phi_2(v) = -0{,}875$, corespunde $v_{cr} = 5{,}264$

3.Forţa axială critică:

$$P_{cr} = \frac{v_{cr}^{\ 2} \cdot 2EI}{l^2} = 5{,}26^2 \cdot \frac{2EI}{4^2} = 3{,}46EI$$

-lungimea de flambaj a stîlpului:

$$l_f = (\pi / v_{cr}) \cdot l = 0{,}597 \cdot 4 = 2{,}38m$$

Exemplul 9.3:

Să se determine parametrul de încărcare axială, forţa axială critică şi lungimile de flambaj ale stîlpilor pentru structura din fig. 9.14

1. Forţa axială şi parametrul de încărcare axială în bara puternic comprimată:

$N_1 = P\ v_1 = 4\sqrt{P/2EI} = v$

Structura este cu noduri fixe singura necunoscută fiind rotirea nodului 1; bara puternic comprimată este încastrată articulată.

2. Calculul elementelor matricei de rigiditate:

Se calculează reacţiunea r_{11} din blocajul de nod.

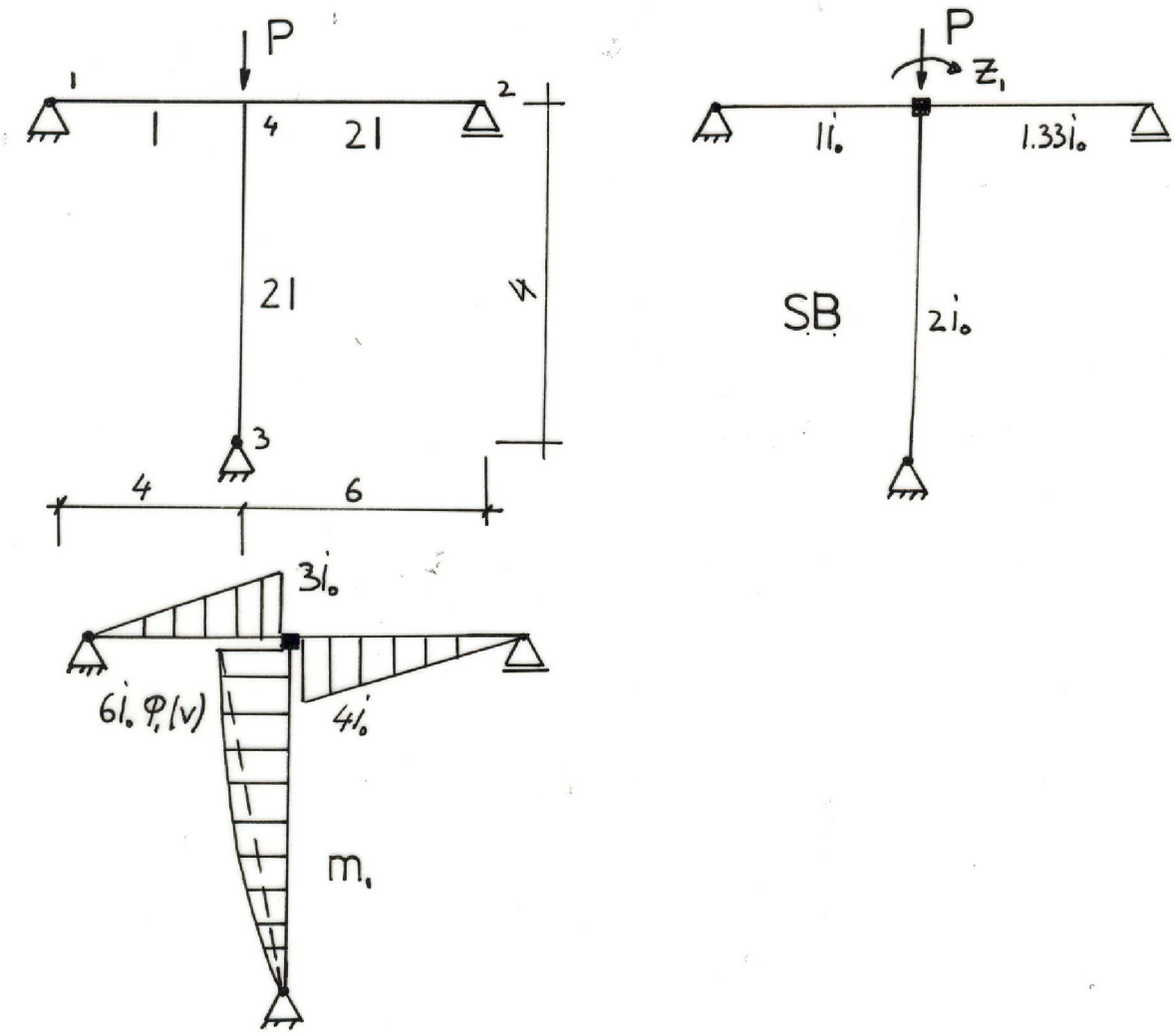


Figura 9.14 Structură iniţială, sistem de bază şi diagramă unitară

$r_{11} = 3i_o + 4i_o + 6i_o\phi_1(v)$

Ecuaţia de stabilitate este: $r_{11} = 0$ rezultînd $\phi_1 v) = -\frac{1{,}75}{1{,}5} = -1{,}167$

Pentru $\phi_1(v) = -1{,}167$, corespunde $v_{cr} = 3{,}78$

Se calculează:

3. Forţa axială critică: $P_{cr} = \dfrac{v_{cr}^{\,2} E \cdot 2I}{l^2} = \dfrac{3{,}78^2 \cdot E \cdot 2I}{4^2} = 1{,}78EI = P_{cr}$

-lungimea de flambaj a stîlpului: $l_f = (\pi / 2{,}51) \cdot 4 = 1{,}24 \cdot 4 = 4{,}99$

Exemplul 9.4:

Să se determine parametrul de încărcare axială, forţa axială critică şi lungimea de flambaj pentru structura din fig.9.15

1. Forţa axială şi factorul de compresiune în bara comprimată:

$v = 4\sqrt{P/(2EI)} = v$

Structura este cu noduri deplasabile, problema avînd două necunoscute, rotirea nodului 1 şi deplasarea liniară la nivelul riglei. Bara comprimată este dublu încastrată.

Ecuaţia de stabilitate are forma:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

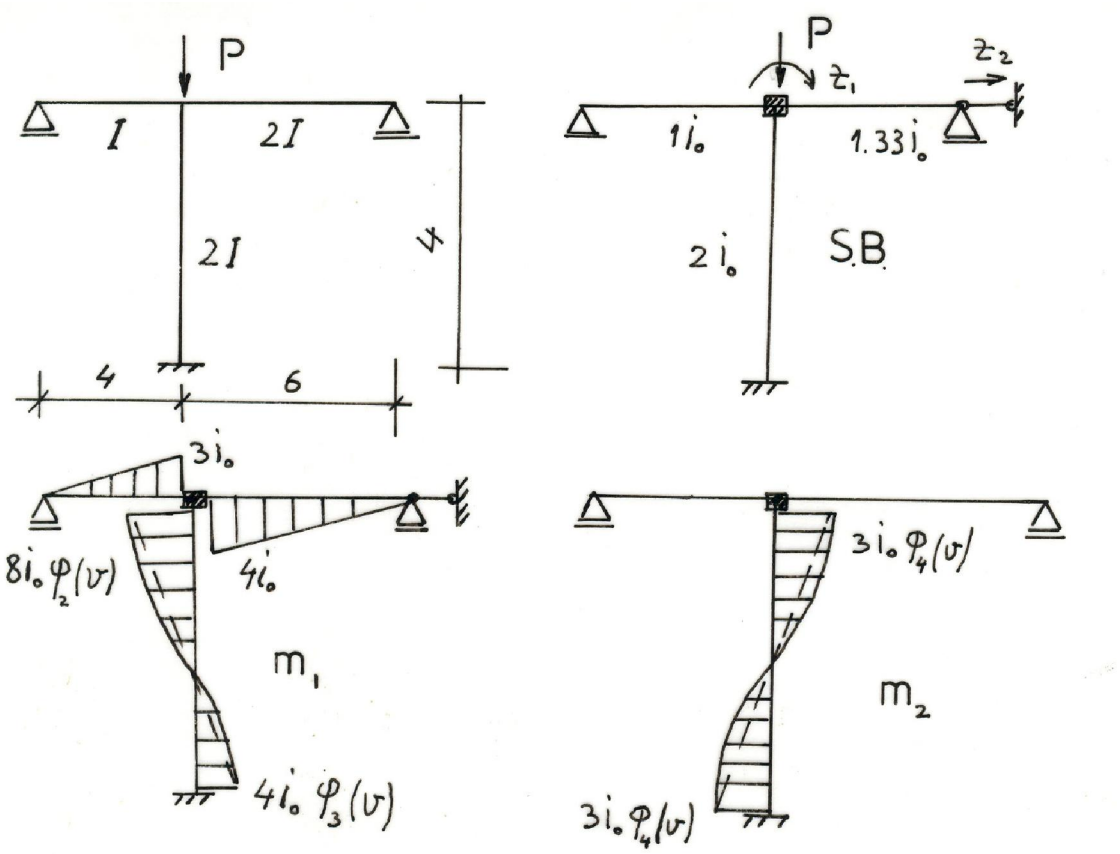


Figura 9.15 Sistem de bază şi diagrame unitare pentru exemplul 5

2. Calculul elementelor matricei de rigiditate.

Se calculează reacţiunile unitare:

$$r_{11} = 3i_o + 4i_o + 8i_o\phi_2(v)$$

$$r_{12} = r_{21} = -3i_o\phi_4(v)$$

$$r_{22} = \frac{1}{4}(3i_o\phi_4(v) + 3i_o\phi_4(v))$$

cu care se alcătuieşte ecuaţia de stabilitate:

$$\begin{vmatrix} 7i_o + 8i_o\phi_2(v) & -3i_o\phi_4(v) \\ -3i_o\phi_4(v) & \frac{1}{4}\cdot 6i_o\phi_4(v) \end{vmatrix} = 0$$

Prin dezvoltarea determinantului se obţine ecuaţia transcendentă:

$$[1{,}75 + 2\cdot\phi_2(v)]\cdot 0{,}375\eta_2(v) - [0{,}75\cdot\phi_4(v)]^2 = 0$$

care se rezolvă prin încercări, soluţia fiind $v_{cr} = 2{,}51$

3. Forţa axială critică: $N_{cr}=2{,}51^2E2I/4^2=0{,}793EI=P_{cr}$

-lungimea de flambaj a stîlpului: $l_f = (\pi / 2{,}518)\cdot 4 = 1{,}248\cdot 4 = 4{,}992m$

Exemplul 9.5:

Să se determine parametrul de încărcare axială, forţa axială critică şi lungimea de flambaj pentru structura din fig.9.16

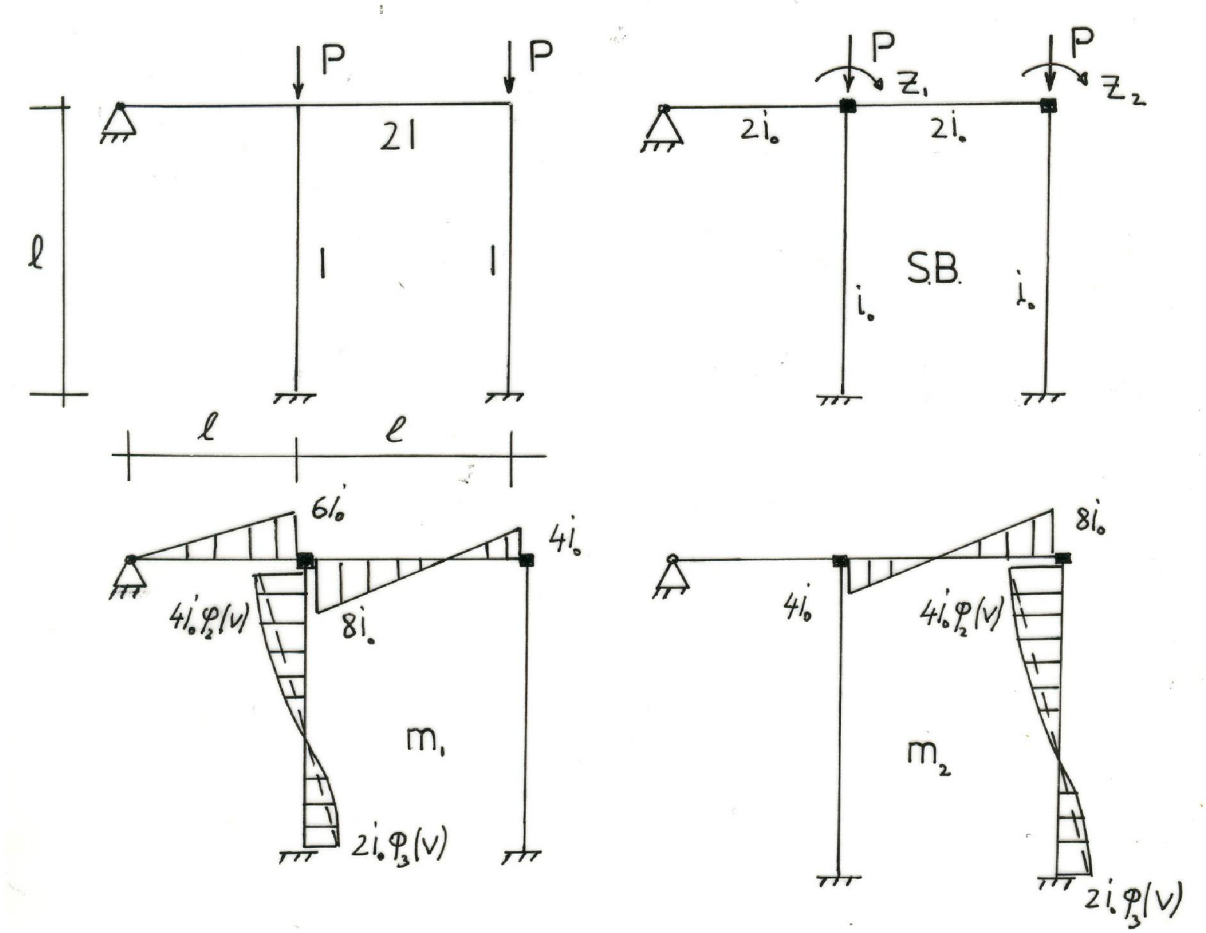


Figura 9.16 Calcul de stabilitate pentru un cadru structură cu noduri fixe

1. Forţele axiale şi parametrii de încărcare axială în barele puternic comprimate:

$N_1 = N_2 = P$

$v_1 = v_2 = l\sqrt{P/(EI)} = v$

Structura este cu noduri fixe, problema avînd două necunoscute, rotirile nodurilor 1 şi 2

2. Calculul elementelor matricei de rigiditate.

Se calculează reacţiunile unitare:

$r_{11} = 8i_o + 6i_o + 4i_o\phi_2(v)$

$r_{22} = 8i_o + 4i_o\phi_2(v)$

$r_{12} = 4i_o$ cu care se alcătuieşte ecuaţia de stabilitate:

$$\begin{vmatrix} 14i_o + 4i_o\varphi_2(v) & 4i_o \\ 4i_o & 8i_o + 4i_o\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

Prin dezvoltarea determinantului se ajunge la ecuaţia:

$\varphi_2{}^2(v) + 5{,}5\varphi_2(v) + 6 = 0$

care poate fi redusă la o ecuaţie algebrică, prin substituţia $x = \varphi_2(v)$:

$x^2 + 5{,}5x + 6 = 0$

Soluţiile acestei ecuaţii sînt:

$x_1 = \varphi_2{}^{(1)}(v) = -1{,}5$ pentru care $v^{(1)} = 5{,}527$

$x_2 = \varphi_2{}^{(2)}(v) = -4$, pentru care $v^{(2)} = 5{,}928$

Valoarea critică este valoarea minimă, $v_{cr} = 5{,}52$

Se calculează:

Forţa axială critică: $P_{cr} = 5{,}527^2 \cdot EI/l^2 = 30{,}54EI/l^2$

-lungimea de flambaj a stîlpilor:

$l_f = (\pi/5{,}52) \cdot l = 0{,}568 \cdot l$